Abteilung für
Angewandte Mathematik

WiSe 2024/25
Prof. Dr. Patrick Dondl, Oliver Suchan

Analysis III

Blatt 14 – 29.01.2025

Abgabe: 05.02.2025, 10:00 Uhr

Homepage zur Vorlesung:

`https://aam.uni-freiburg.de/agdo/lehre/ws24/analysis3/`

Aufgabe 1 (4 Punkte)**.**
Der Schwerpunkt einer λ^n-messbaren, beschränkten Menge $B \subset \mathbb{R}^n$ mit $\lambda^n(B) \neq 0$ ist gegeben durch

$$\overline{x} = \frac{1}{\lambda^n(B)} \int_B x \, d\lambda^n(x).$$

(a) Zeigen Sie, dass $\overline{x}$ das Integral $I(y) := \int_B \|x - y\|^2 \, d\lambda^n(x)$ minimiert.

(b) Berechnen Sie den Schwerpunkt des Kugeloktanten $B := \left\{ (x, y, z) \in \overline{B(0,1)} \;\middle|\; x, y, z \geq 0 \right\}$.

(c) Es sei $B \subset \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$ beschränkt und λ^2-messbar. Betrachten Sie $A := \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; (\sqrt{x^2 + y^2}, z) \in B \right\}$ und zeigen Sie

$$\lambda^3(A) = 2\pi \overline{y} \lambda^2(B),$$

wobei $(\overline{y}, \overline{z})$ der Schwerpunkt von B ist.

Aufgabe 2 (4 Punkte)**.**
Seien $k, \omega > 0$. Beweisen Sie, dass die Länge der durch die Gleichung

$$x^2 + \frac{y^2}{1 + (k\omega)^2} = \frac{1}{\omega^2}$$

anngegebenen Ellipse in $\mathbb{R}^2$ gleich der Länge der Sinusoide

$$y = k \sin \omega x$$

zwischen den Punkten $(0, 0)$ und $(\frac{2\pi}{\omega}, 0)$ ist.

Aufgabe 3 (4 Punkte)**.**
Betrachte auf $U \subset \mathbb{R}^n$ die Riemannsche Metrik $g_{ij} = \exp(2\lambda)\delta_{ij}$ mit $\lambda \in C^2(U)$. Zeigen Sie folgende Aussagen:

(a) $\Delta_g u = \exp(-2\lambda)(\Delta u + (n-2)\langle Du, D\lambda\rangle)$.

(b) $\Delta \exp\left(\frac{n-2}{2}\lambda\right) = 0 \implies \Delta_g u = \exp\left(-\frac{n+2}{2}\lambda\right)\Delta\left(\exp\left(\frac{n-2}{2}\lambda\right)u\right)$.

(c) Für $\phi\colon \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \to \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, $\phi(x) = x/\|x\|^2$, und g die durch ϕ induzierte Riemannsche Metrik auf $(\mathbb{R}^n \setminus \{0\}, \langle\cdot,\cdot\rangle)$, folgt die *Formel von Kelvin*:

$$(\Delta v) \circ \phi = \|x\|^{n+2}\Delta\left(\|x\|^{2-n}u\right) \quad \text{für } u = v \circ \phi.$$

Aufgabe 4 (4 Punkte)**.**
Betrachten Sie für $0 < r < 1$ den Torus

$$T_r \coloneqq \left\{ (z,w) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \;\middle|\; \|z\|^2 = r^2, \|w\|^2 = 1 - r^2 \right\}.$$

Zeigen Sie, dass T_r eine kompakte 2-dimensionale Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^4$ ist, und berechnen Sie den Flächeninhalt von T_r.