Analysis III

Blatt 15 – 05.02.2025

Abgabe: **Keine Abgabe**

Homepage zur Vorlesung:

`https://aam.uni-freiburg.de/agdo/lehre/ws24/analysis3/`

Aufgabe 1.
Seien $m \in \mathbb{N}, I \subset \mathbb{R}$ ein offenes Intervall und $\phi \in C^1(I, (0, \infty))$. Definiere

$$V = \{\, (x, t) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R} \mid t \in I, \|x\|_2 \leq \phi(t) \,\}$$

sowie $M = \partial V \cap (\mathbb{R}^m \times I)$.

(a) Zeigen Sie, dass M eine C^1-Hyperfläche ist (bzw. C^1-Untermannigfaltigkeit).

(b) Für $x \in M$ berechnen Sie die Normale bei x an M.

(c) Geben Sie eine Formel für das Oberflächenmaß $\mu_M(M)$ an.

(d) *Gabriels Horn* ist die Fläche M in der Situation $m = 2$, $I = (1, \infty)$ und $\phi(t) = t^{-1}$, $t \in I$. Zeigen Sie, dass die Oberfläche von M unendlich groß, aber das Volumen von V endlich ist.

Aufgabe 2.
Berechnen Sie die folgenden Oberflächenintegrale

(a) $\int_M y^2 z \, d\mu_M(x, y, z)$, wobei $M = \partial B(0, 1) \subset \mathbb{R}^3$.

(b) $\int_S (x^2 + y^2) \, d\mu_S(x, y)$, wobei $S = \{\, (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 3 \leq z \leq 6, z^2 = 3(x^2 + y^2) \,\}$.

Sei $f\colon B(0, 1) \to \mathbb{R}$ integrierbar.

(c) Zeigen Sie die Formel $\int_{B(0,1)} f \, d\lambda^m = \int_0^1 \left(\int_{\partial B(0,r)} f \, d\mu \right) dr$.
(Gehen Sie dabei in Ihrer Lösung auf die folgende Frage ein: Ist f für jedes $r \in (0, 1)$ auf $\partial B(0, r)$ integrierbar, und falls nicht, wie ist dann die rechte Seite der Formel zu verstehen?)

Aufgabe 3.

(a) Berechnen Sie das Oberflächenintegral

$$\int_{\partial V} \langle f, \nu \rangle \, d\mu,$$

wobei $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3; f(x, y, z) = (-x^2 yz, xy^2 z, z)$ und $V = [0, 1]^3$.

(b) Seien $m \in \mathbb{N}, B(0, 1) \subset \mathbb{R}^m$ und $A \in \mathbb{R}^{m \times m}$. Berechnen Sie $\int_{\partial B(0,1)} \langle Ax, x \rangle \, d\mu(x)$.

Aufgabe 4.
Berechnen Sie für $V \coloneqq \{\, (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x,z > 0, y < 0, x^2+y^2+z^2 < 1 \,\}$ das Integral

$$\int_V (xy + yz + xz)\, d(x,y,z)$$

(a) mit dem Gaußschen Integralsatz,

(b) direkt.

Aufgabe 5.
Sei $H = \{\, x \in \mathbb{R}^3 \mid x_3 \leq 0 \,\}$ die untere Halbebene. Sei $V \subset H$ offen und beschränkt mit dünnsingulärem C^1-Rand sowie $p(x) = x_3 \nu(x)$ für $x \in \partial V$. Berechnen Sie (komponentenweise) das Oberflächenintegral

$$F = \int_{\partial V} p \, d\mu.$$

(*Interpretation:* H ist mit einer Flüssigkeit der Dichte 1 gefüllt, $p(x)$ ist der Druck auf V an der Stelle x und F ist die daraus resultierende Auftriebskraft auf den Körper V. Dieser Zusammenhang wird *Archimedisches Prinzip* genannt. *Dünnsingulärer* C^1*-Rand* bedeutet hier, dass der Rand bis auf eine vernachlässigbare Menge an Singularitäten C^1 ist.)