WiSe 2024/25
Prof. Dr. Patrick Dondl, Oliver Suchan

Analysis III

Blatt 2 – 23.10.2024

Abgabe: 30.10.2024, 10:00 Uhr

Homepage zur Vorlesung:

`https://aam.uni-freiburg.de/agdo/lehre/ws24/analysis3/`

Aufgabe 1 (1+1+1+1 Punkte).
Seien $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum und $A_j \in \mathcal{A}$, $j \in \mathbb{N}$. Wir definieren

$$\liminf_{j\to\infty} A_j = \bigcup_{k=1}^{\infty} \bigcap_{j=k}^{\infty} A_j, \quad \limsup_{j\to\infty} A_j = \bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{j=k}^{\infty} A_j.$$

Zeigen Sie die folgenden Aussagen.

(a) $\liminf\limits_{j\to\infty} A_j \in \mathcal{A}, \limsup\limits_{j\to\infty} A_j \in \mathcal{A}$.

(b) $\mu\left(\liminf\limits_{j\to\infty} A_j\right) \leq \liminf\limits_{j\to\infty} \mu(A_j)$.

(c) Falls $\mu\left(\bigcup_{j=m}^{\infty} A_j\right) < \infty$ für ein $m \in \mathbb{N}$, dann gilt $\mu\left(\limsup\limits_{j\to\infty} A_j\right) \geq \limsup\limits_{j\to\infty} \mu(A_j)$.

(d) Ist die Voraussetzung $\mu\left(\bigcup_{j=m}^{\infty} A_j\right) < \infty$ in (c) notwendig?

Aufgabe 2 (4 Punkte).
Seien $X = [0,1]$ und $\mathcal{A} = \mathcal{P}(X)$. Zeigen Sie, dass es kein Wahrscheinlichkeitsmaß auf $\mathcal{A}$ gibt, welches nur die Werte 0 und 1 annimmt und bei dem für jedes $x \in X$ die Menge $\{x\}$ Maß 0 hat.

Aufgabe 3 (4 Punkte).
Finden Sie einen Maßraum $(X, \mathcal{A}, \mu)$ und Funktionen $f, g \colon X \to \mathbb{R}$ so, dass f $\mathcal{A}$-messbar ist, g nicht $\mathcal{A}$-messbar ist, und $f = g$ μ-f.ü. auf X.

Aufgabe 4 (4 Punkte).
Sei $(X, \mathcal{A})$ ein messbarer Raum und sei $f_n \colon X \to \overline{\mathbb{R}}$ eine Folge $\mathcal{A}$-messbarer, numerischer Funktionen. Zeigen Sie, dass $\{\, x \mid f_n(x) \text{ konvergiert} \,\} \in \mathcal{A}$.