Abteilung für
Angewandte Mathematik

WiSe 2024/25
Prof. Dr. Patrick Dondl, Oliver Suchan

Analysis III

Blatt 3 – 30.10.2024

Abgabe: 06.11.2024, 10:00 Uhr

Homepage zur Vorlesung:

https://aam.uni-freiburg.de/agdo/lehre/ws24/analysis3/

Aufgabe 1 (4 Punkte)**.**
Sei $(X, \mathcal{A})$ ein messbarer Raum, $D \in \mathcal{A}$, $f, g\colon D \to \overline{\mathbb{R}}$ $\mathcal{A}$-messbar und sei $\alpha \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass dann auch die folgenden Funktionen auf ihren Definitionsbereichen, die in $\mathcal{A}$ liegen, $\mathcal{A}$-messbar sind:

$$f + g, f^{\pm}, \max(f, g), \min(f, g), |f|, fg, f/g.$$

Aufgabe 2 (2+1+1 Punkte)**.**
Die Funktionen $u\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^k$, $f\colon \mathbb{R}^{m+k} \to \mathbb{R}^l$ und $g\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ seien jeweils Borel-messbar.

(a) Zeigen Sie die $\mathcal{B}_1$-$\mathcal{B}_1$-Messbarkeit der Funktion $h\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$h(x) = \begin{cases} \sin(1/x), & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

(b) Zeigen Sie, dass $\phi\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^l; \phi(x) = f(x, u(x))$, Borel-messbar ist.
(c) Zeigen Sie, dass $\psi\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}; \psi(x) = \operatorname{sign}(g(x))$, Borel-messbar ist. (Dabei ist $\operatorname{sign}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ durch $\operatorname{sign}(t) = t/|t|$ für $t \neq 0$ und $\operatorname{sign}(0) = 0$ erklärt.)

Aufgabe 3 (1+3 Punkte)**.**
Sei $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Zeigen Sie: Wenn f monoton ist, dann ist f $\mathcal{B}_1$-$\mathcal{B}_1$-messbar.
Mögliche Vorgehensweisen.

(a) Untersuchen Sie die Mengen $\{f > a\}$ für $a \in \mathbb{R}$.
(b) Zeigen Sie, dass die Menge der Unstetigkeitsstellen einer monotonen Funktion höchstens abzählbar ist. Zeigen Sie dann, dass jede Funktion mit höchstens abzählbar vielen Unstetigkeitsstellen Borel-messbar ist.

Aufgabe 4 (2+2 Punkte)**.**
Sei X eine überabzählbare Menge. Für $A \in X$ definieren wir $\gamma(A) := 0$, falls A abzählbar ist, und $\gamma(A) := 1$, falls A überabzählbar ist.

(a) Zeigen Sie, dass γ ein äußeres Maß auf X ist.
(b) Zeigen Sie, dass gilt $\mathcal{M}(\gamma) = \mathcal{A}$, wobei

$$\mathcal{A} := \{\, A \subset X \mid A \text{ abzählbar oder } X \setminus A \text{ abzählbar} \,\}.$$