Abteilung für
Angewandte Mathematik

WiSe 2024/25
Prof. Dr. Patrick Dondl, Oliver Suchan

Analysis III

Blatt 4 – 06.11.2024

Abgabe: 13.11.2024, 10:00 Uhr

Homepage zur Vorlesung:

`https://aam.uni-freiburg.de/agdo/lehre/ws24/analysis3/`

Aufgabe 1 (6 Punkte)**.**
Sei $(a, b) \subset I \subset [a, b]$ ein Intervall in $\mathbb{R}$. Dann definieren wir die Mengenfunktion vol_1 auf den Intervallen durch

$$\mathrm{vol}_1(I) := (b - a) \geq 0,$$

Zeigen Sie, dass auch für jedes Intervall $(a, b) \subset I \subset [a, b]$ $\mathrm{vol}_1^*(I) = \mathrm{vol}_1(I)$ gilt, wobei vol_1^* das von vol_1 induzierte äußere Maß bezeichnet.

Aufgabe 2 (4 Punkte)**.**
Analog zu äußeren Maßen wollen wir nun *innere Maße* definieren. Sei vol_1^* das äußere Maß aus Aufgabe 1, und für $A \subset \mathbb{R}$ sei das innere Maß $\mathrm{vol}_{1,*} \colon \mathcal{P}(\mathbb{R}) \to [0, \infty]$ definiert durch

$$\mathrm{vol}_{1,*}(A) := \sup\{\, \mathrm{vol}_1^*(D) - \mathrm{vol}_1^*(D \setminus A) \mid D \subset \mathbb{R}, \mathrm{vol}_1^*(D \setminus A) < \infty \,\}.$$

Zeigen Sie, dass für $A \in \mathcal{M}(\mathrm{vol}_1^*)$ gilt $\mathrm{vol}_{1,*}(A) = \mathrm{vol}_1^*(A)$.

Bemerkung: das äußere Maß versucht die Menge A durch eine Überdeckung von Intervallen zu messen, das Maß der Menge wird im Prinzip von außen an A approximiert. Das innere Maß hingegen versucht die Menge $D \setminus A$ von außen zu approximieren und liefert dadurch eine Approximation an A von innen. Dies ähnelt den Ober- und Untersummen des Riemann-Integrals. Die Mengen, für die das äußere und innere Maß übereinstimmen, nehmen eine ausgezeichnete Rolle ein, denn das sind genau unsere messbaren Mengen.

Aufgabe 3 (2 Punkte)**.**
Sei $A \subset \mathbb{R}$ abzählbar. Zeigen Sie, dass A eine vol_1^*-Nullmenge ist.

Aufgabe 4 (4 Punkte)**.**
Sei $(\mu_n)_n$ eine isotone Folge von Prämaßen auf einem Ring $\mathcal{R}$, d.h. $\mu_n(A) \leq \mu_{n+1}(A)$ für alle $A \in \mathcal{R}$ und alle $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, dass $\mu_\infty(A) := \lim_{n\to\infty} \mu_n(A)$ ein Prämaß auf $\mathcal{R}$ definiert.