Analysis III

Blatt 5 – 13.11.2024

Abgabe: 20.11.2024, 10:00 Uhr

Homepage zur Vorlesung:

`https://aam.uni-freiburg.de/agdo/lehre/ws24/analysis3/`

Aufgabe 1 (4 Punkte)**.**
In der Vorlesung haben wir gesehen, dass gilt:
Sei X eine Menge und sei μ ein äußeres Maß auf X. Durch die Einschränkung von μ auf die σ-Algbera $\mathcal{M}(\mu)$ der μ-messbaren Mengen erhalten wir ein vollständiges Maß $\lambda = \mu|_{\mathcal{M}(\mu)}$. Umgekehrt können wir ein gegebenes Maß λ auf einer σ-Algebra $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$ mit der Carathéodory-Fortsetzung zu einem regulären äußeren Maß λ^C auf X fortsetzen. Dann sind die durch Einschränkung bzw. Fortsetzung gegebenen Abbildungen zwischen den σ-endlichen, regulären äußeren Maßen und den σ-endlichen, vollständigen Maßen auf X zueinander invers und damit insbesondere bijektiv.

Gilt diese Aussage auch noch, falls man jeweils eine der Eigenschaften regulär, σ-endlich bzw. vollständig weglässt?

Aufgabe 2 (2+2 Punkte)**.**
Für $A, B \subset X$ definieren wir die symmetrische Differenz $A\Delta B$ durch

$$A\Delta B \coloneqq (A \setminus B) \cup (B \setminus A) = (A \cup B) \setminus (A \cap B),$$

d.h. $A\Delta B$ enthält die x aus X, welche entweder in A oder in B liegen.

(a) Zeigen Sie, dass $\mathcal{P}(X)$ versehen mit der symmetrischen Differenz Δ als Addition und der Durchschnittsbildung $\cap$ als Multiplikation, ein kommutativer Ring (im Sinner der Algebra) mit Nullelement $\emptyset$ und Einselment X ist.

(b) Sei $\mathcal{R} \subset \mathcal{P}(X)$. Zeigen Sie die Äquivalenz der beiden Aussagen
  (i) $\mathcal{R}$ ist ein ring über X (im Sinne der Vorlesung), d.h. $\emptyset \in \mathcal{R}$ und $A, B \in \mathcal{R}$ impliziert $A \setminus B$, $A \cup B \in \mathcal{R}$.
  (ii) $\mathcal{R}$ ist ein Unterring von $(\mathcal{P}(X), \Delta, \cap)$ (im Sinne der Algebra), d.h. $\emptyset \in \mathcal{R}$ und $A, B \in \mathcal{R}$ impliziert $A\Delta B$, $A \cap B \in \mathcal{R}$.

  Dies rechtfertigt den Namen “Ring” in der Vorlesung.

Aufgabe 3 (8 Punkte)**.**
Für eine Menge $\emptyset \neq U \subset \mathbb{R}^n$ ist der *Durchmesser* von U gegeben durch $\operatorname{diam} U \coloneqq \sup_{x,y \in U} |x - y|$ und wir setzen $\operatorname{diam} \emptyset \coloneqq 0$. Für $\delta > 0$ sei

$$\mathcal{A}^\delta \coloneqq \{\, A \subset \mathbb{R}^n \mid \operatorname{diam} A < \delta \,\}$$

und für $s \in [0,\infty)$ seien die Mengenfunktionen $\lambda_{s,\delta}\colon \mathcal{A}^\delta \to [0,\infty]$ definiert durch

$$\lambda_{s,\delta}(A) := \begin{cases} (\operatorname{diam} A)^s & \text{für } A \neq \emptyset \\ 0 & \text{für } A = \emptyset \end{cases}$$

(dabei verwenden wir die Konvention $0^0 := 1$). Sei $\mathcal{H}^s_\delta$ für alle $A \subset \mathbb{R}^n$ definiert durch

$$\mathcal{H}^s_\delta(A) := \inf\left\{ \sum_{i\in\mathbb{N}} \lambda_{s,\delta}(A_i) \;\middle|\; A \subset \bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i,\, A_i \in \mathcal{A}^\delta \;\forall i \in \mathbb{N} \right\}.$$

Zeigen Sie

(a) Für jedes $s \geq 0$ und jedes $A \subset \mathbb{R}^n$ ist die Funktion $(0,\infty) \ni \delta \mapsto \mathcal{H}^s_\delta(A)$ monoton fallend. Damit ist $\mathcal{H}^s(A) := \lim_{\delta\to 0} \mathcal{H}^s_\delta(A) = \sup_{\delta>0} \mathcal{H}^s_\delta(A) \in [0,\infty]$ wohldefiniert und heißt das *s-dimensionale Hausdorff-Maß* von A.

(b) $\mathcal{H}^s\colon \mathcal{P}(\mathbb{R}^n) \to [0,\infty]$, $A \mapsto \mathcal{H}^s(A)$ ist ein äußeres Maß.

(c) $\mathcal{H}^0$ ist das Zählmaß.

(d) Ist $\delta > 0$ und $s < t < \infty$, so gilt für alle $A \subset \mathbb{R}^n$: $\mathcal{H}^t_\delta(A) \leq \delta^{t-s}\mathcal{H}^s_\delta(A)$.

(e) Sei $A \subset \mathbb{R}^n$ mit $\mathcal{H}^s(A) < \infty$. Dann gilt $\mathcal{H}^t(A) = 0$ für alle $s < t < \infty$. Die Zahl $\dim_H(A) := \inf\{\, s \geq 0 \mid \mathcal{H}^s(A) = 0 \,\}$ heißt die *Hausdorff-Dimension* von A.

(f) Für $A \subset B \subset \mathbb{R}^n$ gilt $\dim_H(A) \leq \dim_H(B)$ und für alle abzählbaren $A \subset \mathbb{R}^n$ gilt $\dim_H(A) = 0$.

(g) Die *Cantormenge* C ist die Menge aller reellen Zahlen in $[0,1]$, die eine triadische Entwicklung nur mit den Ziffern 0 und 2 erlaubt.

$$C := \{0.k_1k_2\ldots := \sum_{j=1}^{\infty} k_j 3^{-j} \colon k_j \in \{0,2\} \text{ für alle } j\}$$

Für C gilt die Abschätzung

$$\frac{1}{2} \leq \mathcal{H}^s(C) \leq 1,$$

wobei $s = \frac{\log 2}{\log 3}$. Damit folgt, dass C die Hausdorff-Dimension $\frac{\log 2}{\log 3}$ hat.