Abteilung für
Angewandte Mathematik

WiSe 2024/25
Prof. Dr. Patrick Dondl, Oliver Suchan

Analysis III

Blatt 6 – 20.11.2024

Abgabe: 27.11.2024, 10:00 Uhr

Homepage zur Vorlesung:

`https://aam.uni-freiburg.de/agdo/lehre/ws24/analysis3/`

Aufgabe 1 (1+2+1 Punkte)**.**
Sei $F\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ wachsend und linksseitig stetig. Dann heißt F *maßerzeugende Funktion* und wir setzen

$$\nu_F([a,b)) := \begin{cases} F(b) - F(a), & a < b, \\ 0, & a \geq b, \end{cases}$$

für $a, b \in \mathbb{R}$ und wir können analog zur Vorlesung ein äußeres Maß ν_F^* definieren.

(a) Geben Sie ein F an, so dass $\nu_F^* = \lambda_1^*$ gilt.

(b) Sei μ ein Maß auf der Borelschen σ-Algebra $\mathcal{B}^1$, und $\mu((-\infty, x))$ sei endlich für $x \in \mathbb{R}$. Außerdem sei

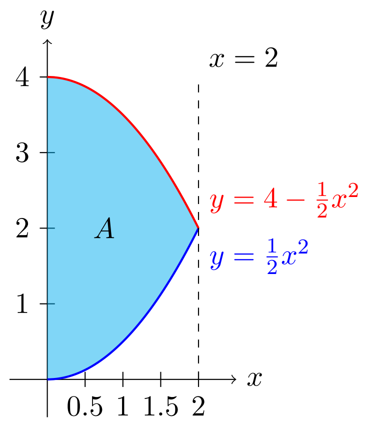
$$F_\mu(x) := \mu((-\infty, x)), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Zeigen Sie, dass F_μ eine maßerzeugende Funktion ist mit $\lim_{x \to -\infty} F_\mu(x) = 0$.

(c) Bestimmen Sie F_{δ_0}, wenn δ_0 das Diracmaß auf $(\mathbb{R}, \mathcal{B}^1)$ mit Träger in 0 bezeichnet.

Aufgabe 2 (2+2+4 Punkte)**.**
Wir betrachten die Menge

$$A := \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; 0 \leq x \leq 2, \tfrac{1}{2}x^2 \leq y \leq 4 - \tfrac{1}{2}x^2 \right\}.$$



(a) Bestimmen Sie $F_1(A)$ und $F^1(A)$.

(b) Berechnen Sie die Lebesgue-Maße $\lambda(F_1(A))$ und $\lambda(F^1(A))$. Wie können Sie diese Werte verwenden, um Aufschluss über das Maß von A zu bekommen?

(c) Wiederholen Sie die Schritte (a) und (b) für $F_2(A)$ und $F^2(A)$.