Abteilung für
Angewandte Mathematik

WiSe 2024/25
Prof. Dr. Patrick Dondl, Oliver Suchan

Analysis III

Blatt 7 – 27.11.2024

Abgabe: 04.12.2024, 10:00 Uhr

Homepage zur Vorlesung:

https://aam.uni-freiburg.de/agdo/lehre/ws24/analysis3/

Aufgabe 1 (2+2 Punkte)**.**
Sei $-\infty < a < b < \infty$ und $f \in C^1([a,b])$.

(a) Sei $E \coloneqq \{ x \in (a,b) \mid f'(x) = 0 \}$. Zeigen sie, dass $f(E)$ eine Lebesgue-Nullmenge ist.
Hinweis: Sie können Lemma 6.16 aus dem Růžička Skript verwenden.

(b) Sei $G \coloneqq \{ x \in [a,b] \mid f(x) = 0 \}$ und $H \coloneqq \{ x \in [a,b] \mid f(x) = 0, f'(x) = 0 \}$. Zeigen Sie, dass $G \setminus H$ eine Lebesgue-Nullmenge ist.
Hinweis: Zeigen Sie, dass $A_n \coloneqq \left\{ x \in (a,b) \;\middle|\; f(x) = 0, |f'(x)| \geq \frac{1}{n} \right\}$ nur endlich viele Elemente enthält.

Aufgabe 2 (2+2 Punkte)**.**
Sei $f\colon \mathbb{R}^2 \to \overline{\mathbb{R}}$ und wir setzen $\mu \coloneqq \lambda^2 \circ f^{-1}$, wobei

$$f(x,y) \coloneqq \begin{cases} \log(\|(x,y)\|_1), & (x,y) \neq 0, \\ -\infty, & (x,y) = 0. \end{cases}$$

(a) Zeigen Sie, dass f $\mathcal{B}^2$-$\overline{\mathcal{B}^1}$-messbar ist.

(b) Berechnen Sie $\mu([a,b))$, für $-\infty < a < b < \infty$.

Aufgabe 3 (4 Punkte)**.**
Begründen Sie, dass $A \coloneqq \{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid \|(x,y,z)\|_\infty \leq 5, \|(x,y)\|_\infty \geq 1 \}$ messbar (d.h. $A \in \mathcal{B}^3$) ist und berechnen Sie $\lambda^3(A)$.

Aufgabe 4 (2+2 Punkte)**.**
Sei $m \in \mathbb{N}$. Die Menge der *Lebesgue-Nullmengen* ist definiert durch

$$\mathcal{N}^m \coloneqq \{ M \subset \mathbb{R}^m \mid \exists N \in \mathcal{B}^m : \lambda^m(N) = 0 \text{ und } M \subset N \}.$$

Man kann die *Lebesguesche σ-Algebra* definieren durch

$$\mathcal{L}^m \coloneqq \{ B \cup M \mid B \in \mathcal{B}^m, M \in \mathcal{N}^m \}.$$

(a) Zeigen Sie, dass $\mathcal{L}^m$ eine σ-Algebra auf $\mathbb{R}^m$ ist.

(b) Man kann nun das Lebesgue-Maß auch auf den Borelmengen $\mathcal{B}^m$ definieren und auf $\mathcal{L}^m$ erweitern durch

$$\mu\colon \mathcal{L}^m \to [0,\infty],\; \mu(A) = \lambda(B), \text{ wobei } A = B \cup M \text{ mit } B \in \mathcal{B}^m \text{ und } M \in \mathcal{N}^m.$$

Zeigen sie, dass μ eine wohldefinierte Abbildung ist und ein Maß auf $\mathcal{L}^m$ definiert.