Analysis III

Blatt 8 – 4.12.2024

Abgabe: 11.12.2024, 10:00 Uhr

Homepage zur Vorlesung:

`https://aam.uni-freiburg.de/agdo/lehre/ws24/analysis3/`

Aufgabe 1 (4 Punkte)**.**
Im Folgenden bezeichne λ^n das Lebesguemaß.

(a) Sei T ein offenes Dreieck in $\mathbb{R}^2$. Zeigen Sie, dass $\lambda^2(T) = \frac{sh}{2}$, wobei s die Länge einer beliebig gewählten Seite ist und h die Höhe des Dreiecks bezüglich dieser Seite ist.

(b) Sei $A \subset \mathbb{R}^2$ konvex, $\operatorname{int}(A) \neq \emptyset$ und $\lambda^n(A) < \infty$. Zeigen sie, dass A beschränkt ist.
Tipp: Setzen Sie voraus, dass A unbeschränkt ist und finden sie eine Folge von in A enthaltenen Dreiecken mit wachsendem Lebesguemaß.

(c) Finden Sie eine unbeschränkte offene Menge $G \subset \mathbb{R}^n$ mit $\lambda^2(G) < \infty$.

Aufgabe 2 (8 Punkte)**.**
Sei $A \subset R^n$ konvex und beschränkt, mit $0 \in \operatorname{int}(A)$. Zeigen Sie das Folgende:

(a) $\operatorname{int}(A) \subset \bigcup_{k\geq 2} \left(\left(1 - \frac{1}{k}\right) \overline{A}\right)$.

(b) Es existiert ein $\delta > 0$ so, dass für alle $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 2$, und alle $x \in \left(1 - \frac{1}{k}\right) A$ gilt $B(x, \frac{\delta}{k}) \subset \operatorname{int}(A)$.

(c) $\operatorname{int}(A) \supset \bigcup_{k\geq 2} \left(\left(1 - \frac{1}{k}\right) \overline{A}\right)$.
Tipp: Approximieren Sie $x \in \left(1 - \frac{1}{k}\right) \overline{A}$ durch Punkte aus $\left(1 - \frac{1}{k}\right) A$ und nutzen Sie (b).

(d) $\lambda^n(\overline{A}) = \lambda^n(\operatorname{int}(A))$.

(e) ∂A ist λ^n-messbar mit $\lambda^n(\partial A) = 0$.

(f) A ist λ^n-messbar.

(g) Finden Sie eine λ^n-Nullmenge $B \subset \mathbb{R}^n$ mit $\lambda^n(\partial B) = \infty$.

Definition.
Für einen Maßraum $(X, \mathcal{A}, \mu)$ und messbare Funktionen f, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}\colon X \to \mathbb{K}$, heißt die Funktionenfolge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *konvergent im Maß* gegen f, wenn für alle $\varepsilon > 0$ gilt, dass

$$\lim_{n\to\infty} \mu\left(\{\, x \in X \mid |f_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon \,\}\right) = 0$$

ist. Man schreibt dann $f_n \xrightarrow{\mu} f$.

Aufgabe 3 (4 Punkte)**.**
Sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum. Seien f, g, f_n, $n \in \mathbb{N}$, μ-messbar und μ-fast überall endlich mit $f_n \xrightarrow{\mu} f$ und $f_n \xrightarrow{\mu} g$ im Maß.

(a) Zeigen Sie, dass für jedes $n \in \mathbb{N}$ und $\lambda \geq 0$ gilt

$$\{|f - g| > \lambda\} \subset \{|f_n - g| > \lambda/2\} \cup \{|f_n - f| > \lambda/2\} \cup N,$$

wobei $N \in \mathcal{A}$ eine μ-Nullmenge ist.

(b) Zeigen Sie, dass gilt $f = g$ μ-fast überall.