Analysis III

Blatt 9 – 11.12.2024

Abgabe: 18.12.2024, 10:00 Uhr

Homepage zur Vorlesung:
`https://aam.uni-freiburg.de/agdo/lehre/ws24/analysis3/`

Aufgabe 1 (1+1+1+1 Punkte).

(a) Ist die Funktion $f\colon (0,1) \to \mathbb{R}; f(x) = x^{3/2} \exp(\cos(1/x)) \tan(x)$ integrierbar?

Bestimmen Sie die folgenden Grenzwerte

(b)
$$\lim_{n\to\infty} \int_{[0,\pi]} \sqrt[n]{\sin(x)}\, dx \quad \text{und} \quad \lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} \exp\Big(-nx^2\Big)\, dx.$$

(c) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \int_0^\infty \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \exp(-2x)\, dx.$

(d) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} n \int_X \log\left(1 + \frac{1}{n} f\right) d\mu$, wobei $f\colon X \to [0,\infty]$ integrierbar bezüglich eines Maßes μ auf X sei.

Aufgabe 2 (4 Punkte).
Sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum und seien $f_n, f \in \mathcal{L}^1(\mu)$, $n \in \mathbb{N}$. Es gelte $f_n(x) \to f(x)$ für fast alle $x \in X$ für $n \to \infty$ und $\int_X |f_n|\, d\mu \to \int_X |f|\, d\mu$ für $n \to \infty$.
Zeigen sie, dass $\int_X |f_n - f|\, d\mu$ für $n \to \infty$ gegen 0 konvergiert.
Hinweis: Lemma von Fatou.

Aufgabe 3 (4 Punkte).
Eine Funktion $\varphi\colon \mathbb{R} \to [0,\infty)$ habe die Eigenschaften

$$\varphi \in C^1(\mathbb{R}), \qquad \int_{\mathbb{R}} \varphi\, d\lambda = 1, \qquad \exists R > 0 : \phi(x) = 0 \text{ für } x \notin [-R, R].$$

Für $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ definiert man die *Faltung* $\varphi * f$ durch

$$\varphi * f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}; \quad (\varphi * f)(x) = \int_{\mathbb{R}} \varphi(x-y) f(y)\, dy.$$

(a) Zeigen Sie $\varphi * f \in C^1(\mathbb{R})$ und bestimmen Sie die Ableitung.

(b) Sei f zusätzlich stetig. Definiere $\varphi_\varepsilon\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}; \varphi_\varepsilon(x) = \frac{1}{\varepsilon}\varphi(\frac{x}{\varepsilon})$ für $\varepsilon > 0$. Zeigen Sie, dass für alle $x \in \mathbb{R}$
$$(\varphi_\varepsilon * f)(x) \to f(x) \text{ für } \varepsilon \to 0$$
gilt.