

Numerik 1

Blatt 5

Abgabe: 7. Januar 2026

Eigenwerte

Aufgabe 21 (4 Punkte). *QR*

Führen Sie einen Schritt des QR-Verfahrens für die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

durch, bestimmen Sie die Eigenwerte von A mit Hilfe des charakteristischen Polynoms und vergleichen Sie die Ergebnisse.

Aufgabe 22 (4 Punkte). *Eigenwerte und Minimierung*

- (1) Sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ symmetrisch mit Eigenwerten $\lambda_1 \geq \lambda_2, \dots \geq \lambda_n$ und sei $v_1 \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ ein Eigenvektor zum Eigenwert λ_1 . Zeigen Sie, dass

$$\lambda_2 = \max \left\{ \frac{x^T A x}{\|x\|_2^2} : x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}, x \cdot v_1 = 0 \right\}.$$

- (2) Zeigen Sie, dass der Vektor $x^* \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ genau dann ein Eigenvektor der symmetrischen Matrix A ist, wenn $\nabla r(x^*) = 0$ gilt mit der Funktion

$$r : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto \frac{x^T A x}{\|x\|_2^2}.$$

Aufgabe 23 (4 Punkte). *Gerschgorin*

- (1) Bestimmen Sie die Gerschgorin-Kreise der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}.$$

- (2) Sei $B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ strikt diagonaldominant und symmetrisch. Geben Sie eine obere Schranke der Konditionszahl $\text{cond}_2(B)$ an.

Aufgabe 24 (4 Punkte). *Potenzmethode*

- (1) Zeigen Sie, dass die Potenzmethode auch dann konvergiert, wenn die Iterierten bezüglich einer anderen Norm normiert werden.
- (2) Führen Sie fünf Schritte der Potenzmethode für die Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & -1 \\ 0 & -1 & 5 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad B = \begin{pmatrix} -6 & -22 & 59 \\ -4 & -6 & 22 \\ -2 & -4 & 13 \end{pmatrix}$$

mit dem Anfangsvektor $x = (1, 1, 1)^T$ durch und beobachten Sie die Größen $\|\tilde{x}_k\|_2$ und (x_k, Ax_k) .

Abgabe der Übungsblätter in dem mit "Numerik" gekennzeichneten Fach im 2. Stock in der Hermann-Herder-Str. 10, neben dem Eingang zu Raum 201 (CIP). Die Übungsblätter müssen bis 14:00 Uhr am jeweils angegebenen Abgabedatum eingeworfen werden.