

Praktikum zu Numerik 1

Blatt 2

Abgabe: 19. November 2025

Stabilität, Cholesky

Aufgabe 5 (4 Punkte). *Stabilität*

Die Aufgabe ϕ ist durch

$$\phi(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} = \frac{1}{x(x+1)}$$

definiert. ϕ kann z.B. über die Verfahren

$$\tilde{\phi}_1(x) = \left(\frac{1}{x}\right) - \left(\frac{1}{x+1}\right), \quad \tilde{\phi}_2 = \frac{1}{(x(x+1))}$$

realisiert werden, wobei die Klammerung die Reihenfolge der Ausführung der Operationen festlegt. Berechnen Sie $\tilde{\phi}_1$ und $\tilde{\phi}_2$ für verschiedene grosse Werte von x und vergleichen Sie die Ergebnisse tabellarisch/graphisch. Wie würden Sie das Verhalten von $\tilde{\phi}_1$ beschreiben?

Aufgabe 6 (4 Punkte). *Die ℓ^p -Normen*

Es sei $x = (x_1, x_2)^T \in \mathbb{R}^2$. Die ℓ^p -Norm von x ist definiert durch

$$\|x\|_{\ell^p} = \begin{cases} (|x_1|^p + |x_2|^p)^{\frac{1}{p}} & \text{für } 1 \leq p < \infty \\ \max\{|x_1|, |x_2|\} & \text{für } p = \infty. \end{cases}$$

Schreiben Sie ein Programm das es Ihnen erlaubt die Niveaumengen der ℓ^p -Normen, $1 \leq p \leq \infty$, in $\mathbb{R}^2$ zu plotten. Zeigen Sie Ihre Ergebnisse für $p = 1, 2$ und ∞ .

Aufgabe 7 (8 Punkte). *Konditionszahl*

- (a) Implementieren Sie das Verfahren für die Choleskyzerlegung einer Matrix A und der anschließenden Lösung eines linearen Gleichungssystems $Ax = b$.
- (b) Stören Sie die rechte Seite, b , des nachfolgenden Gleichungssystems mit dem Vektor $\delta b \in \mathbb{R}^n : \delta b_i = 10^{-5} \cos(i\pi/n)$ für $i = 1, 2, \dots, 10$ und $n = 10$:

$$a_{ij} = (i+j-1)^{-1}, \quad b_i = \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} / (i+k-1), \quad x_i = (-1)^{i-1}, \quad i, j = 1, 2, \dots, n.$$

Zur entsprechenden Lösung $x + \delta x$ berechnen Sie den relativen Fehler $\|\delta x\|_2 / \|x\|_2$. Zur Lösung der Gleichungssysteme eignet sich die Choleskyzerlegung von Teil (a).

Abgabe: Die Übungsblätter müssen bis 14:00 Uhr am jeweils angegebenen Abgabedatum abgegeben werden.