Abteilung für
Angewandte Mathematik

Prof. Dr. D. Kröner
A. Korsch

29.06.2015

Übung zur Vorlesung

Numerik

SS 2015 — Blatt 6

Abgabe: Montag, den 13.07.2015, bis 14 Uhr in die Briefkästen in der Hermann-Herder-Str.10.

Aufgabe 1 (4 Punkte)

Sei $f \in C^4([a,b])$. Zeigen Sie, dass für die Simpson-Regel die folgende Restgliedabschätzung gilt

$$I(f) - I_2(f) = -\frac{(b-a)^5}{2880} f^{(4)}(\xi)$$

für ein geeignetes $\xi \in [a,b]$.

Aufgabe 2 (4 Punkte)

Zeigen Sie, dass für die summierte Quadraturformel

$$I_n^{\Sigma}(f) := \sum_{i=0}^{N-1} I_{[x_i,x_{i+1}]}^n(f)$$

für die für $m \geq n$ und $h = (b-a)/N$ gelte

$$I_{[x_i,x_{i+1}]}(f) - I_{[x_i,x_{i+1}]}^n(f) = \omega_n h^{m+2} f^{(m+1)}(\xi_i), \qquad \xi_i \in [x_i, x_{i+1}]$$

folgt

$$I(f) - I_n^{\Sigma}(f) = \omega_n h^{m+1}(b-a) f^{(m+1)}(\xi),$$

mit einem $\xi \in [a,b]$.

Aufgabe 3 (4 Punkte)

Sei $Q : C([a,b] \to \mathbb{R}$ eine Quadraturformel mit $n+1$ Gewichten und Quadraturpunkten $(x_i, w_i)_{i=0,\ldots,n}$, die exakt vom Grad n ist.

(i) Zeigen Sie, dass

$$w_i = \int_a^b L_i(x)\,\mathrm{d}x$$

für $i = 0, 1, \ldots, n$ mit den durch die Punkte $(x_i)_{i=0,\ldots,n}$ definierten Lagrange-Basispolynomen $(L_i)_{i=0,\ldots n}$.

(ii) Zeigen Sie, dass im Fall der Exaktheit vom Grad $2n$ gilt, dass $w_i > 0$ für $i = 0, 1, \ldots, n$.

Aufgabe 4 (4 Punkte)
Es sei $f \in C([a,b])$ und für eine Zerlegungsfeinheit $h = (b-a)/N$ sei $T(h)$ der Wert der summierten Trapezregel, das heißt

$$T(h) = \frac{h}{2}\Big[f(a) + 2\sum_{i=1}^{N-1} f(a+ih) + f(b)\Big].$$

Zeigen Sie, dass die Extrapolation $T^*(h) = (T(h) - 2^\gamma T(h/2))/(1-2^\gamma)$ der Werte $T(h)$ und $T(h/2)$ mit einem geeigneten Parameter γ auf die summierte Simpson-Regel führt.

Weitere Informationen zur Vorlesung finden Sie unter:
http://aam.uni-freiburg.de/abtlg/wissmit/agkr/korsch/num15/num15s