

Übung zur Vorlesung
Numerik für Differentialgleichungen
SS 2015 — Blatt 1

Abgabe: Mittwoch, den 06.05.2014, vor der Vorlesung

Aufgabe 1 (4 Punkte)

In einem Klärbecken einer Abwasseraufbereitungsanlage sind anfänglich 500 Kubikmeter Abwasser mit einer Schmutzkonzentration von 2 kg Schmutzpartikel pro Kubikmeter. Pro Stunde werden 10 Kubikmeter geklärtes Wasser entnommen und kontinuierlich 10 Kubikmeter Schmutzwasser mit einer Konzentration von 5 kg pro Kubikmeter eingeleitet. Die im Klärbecken enthaltenen Bakterien zersetzen pro Stunde 5% der vorhandenen Schmutzpartikel. Wir nehmen an, dass die Schmutzverteilung zu jedem Zeitpunkt homogen ist. Wie hoch ist die Schmutzkonzentration nach t Stunden im Klärbecken?

Aufgabe 2 (4 Punkte)

(a) Sei $f(t, x) = 2\sqrt{|x|}$. Zeigen Sie, dass das Anfangswertproblem

$$x' = f(\cdot, x), \quad x(0) = 0$$

unendlich viele verschiedene Lösungen $x \in C^1(\mathbb{R})$, nämlich $x \equiv 0$ und

$$x(t) = \begin{cases} 0 & t \leq s, \\ (t - s)^2 & t \geq s \end{cases}$$

für alle $s \geq 0$ besitzt.

(b) Warum ist das kein Widerspruch zum Satz von Picard-Lindelöf?

Aufgabe 3 (4 Punkte)

(a) Zeigen Sie, dass das Anfangswertproblem

$$\begin{cases} u'(t) = 2tu(t) \text{ für } t \in (-1, 1), \\ u(0) = 2. \end{cases} \quad (**)$$

eine Lösung $u \in C^1((-1, 1)) \cap C^0([-1, 1])$ besitzt.

(b) Zeigen oder widerlegen Sie die folgende Aussage: Das Anfangswertproblem (**) besitzt genau eine Lösung $u \in C^1((-1, 1)) \cap C^0([-1, 1])$.

Aufgabe 4

(4 Punkte)

Für $\lambda \in \mathbb{R}$ setze

$$u_\lambda(t) := \exp(\lambda t^2) \text{ für } t \in \mathbb{R} \text{ und } v_\lambda(x) := \lambda |x|^4 \text{ für } x \in \mathbb{R}^2.$$

(a) Bestimmen Sie λ so, dass u_λ eine Lösung der Differentialgleichung

$$u''(t) = tu'(t) + u(t) \text{ für alle } t \in \mathbb{R}$$

ist.

(b) Bestimmen Sie λ so, dass v_λ eine Lösung der Differentialgleichung

$$\Delta v(x) = |x|^2 \text{ für alle } x \in \mathbb{R}^2$$

ist.

Die Vorlesungshomepage finden Sie unter

<http://aam.uni-freiburg.de/abtlg/wissmit/agkr/malkmust/lehre/SS15/Ubungen>