Abteilung für
Angewandte Mathematik

Dr. M. Nolte
T. Malkmus

06.05.2015

Übung zur Vorlesung

Numerik für Differentialgleichungen

SS 2015 — Blatt 2

Abgabe: Mittwoch, den 20.05.2014, vor der Vorlesung

Aufgabe 1 (4 Punkte)

Betrachten Sie das Anfangswertproblem:

$$u'(t) = \frac{1}{u(t)}$$
$$u(t_0) = u_0$$

mit Anfangswerten $u_0 \neq 0$. Zeigen Sie die Existenz einer Lösungen mit Hilfe des Satzes von Picard-Lindelöf. Geben Sie die Lösung an.

Aufgabe 2 (4 Punkte)

Sei $u_0 > 0$. Zeigen Sie, dass die Lösung des Anfangswertproblems

$$\begin{cases} u'(t) = \big(u(t)\big)^2 \text{ für } t > 0, \\ u(0) = u_0 \end{cases}$$

für $t \to \frac{1}{u_0}$ unbeschränkt ist.

Aufgabe 3 (4 Punkte)

Betrachten Sie das Anfangswertproblem:

$$u'(t) = t^2 \sin(u(t))\, u(t) + 2 \qquad \text{für } t > 0$$
$$u(0) = 1\ .$$

Zeigen Sie unter Verwendung des Gronwall Lemmas, dass für die Lösung u folgende Ungleichung gilt:

$$u(t) \leq (1 + 2t)\ \exp\left(\frac{1}{3}t^3\right) \qquad \text{für } 0 \leq t \leq 1$$

Aufgabe 4 (Methode der Variation der Konstanten) (4 Punkte)

Sei I ein offenes Intervall und seien $g, h : I \to \mathbb{R}$ stetige Funktionen.

(a) Bestimmen Sie alle Lösungen der Differentialgleichung

$$u'(t) + g(t)u(t) = 0 \text{ für } t \in I.$$

(b) Zeigen Sie, dass die Differentialgleichung

$$Lu := u'(t) + g(t)u(t) = h(t) \text{ für } t \in I$$

dem Superpositionsprinzip genügt: Für $i = 1, 2, \ldots, n$ seien $h_i : I \to \mathbb{R}$ stetige Funktionen und $u_i \in C^1(I)$ Lösungen von

$$Lu_i = h_i \text{ in } I.$$

Dann ist $\overline{u} := \sum_{i=1}^n u_i$ eine Lösung von $L\overline{u} = \overline{h}$ in I, wobei $\overline{h} := \sum_{i=1}^n h_i$.

(c) Seien $s_0 \in \mathbb{R}$ und $t_0 \in I$. Geben Sie die eindeutige Lösung des Anfangswertproblems

$$\begin{cases} Lu = h \text{ in } I, \\ u(t_0) = s_0. \end{cases} \tag{$*$}$$

an.

Die Vorlesungshomepage finden Sie unter

`http://aam.uni-freiburg.de/abtlg/wissmit/agkr/malkmust/lehre/SS15/Ubungen`