

Übung zur Vorlesung  
**Numerik für Differentialgleichungen**  
SS 2015 — Blatt 3

**Abgabe:** Mittwoch, den 10.06.2015, vor der Vorlesung

**Aufgabe 1** (4 Punkte)

Zeigen Sie, dass für alle  $n \in \mathbb{N}$  die Abschätzung

$$\left(1 + \frac{t}{n}\right)^n \leq \exp(t) \text{ für alle } t > 0$$

gilt.

**Aufgabe 2 (Konsistenzordnung)** (4 Punkte)

Zeige, dass das Crank-Nicholson Verfahren

$$\begin{aligned} u_{i+1}^{(h)} &= u_i^{(h)} + \frac{h}{2} (f(t_i^{(h)}, u_i^{(h)}) + f(t_{i+1}^{(h)}, u_{i+1}^{(h)})), \\ u_0^{(h)} &= u_0 \end{aligned}$$

und das Heun-Verfahren

$$\begin{aligned} u_{i+0.5}^{(h)} &= u_i^{(h)} + hf(t_i^{(h)}, u_i^{(h)}), \\ u_{i+1}^{(h)} &= u_i^{(h)} + \frac{h}{2} (f(t_i^{(h)}, u_i^{(h)}) + f(t_{i+1}^{(h)}, u_{i+0.5}^{(h)})), \\ u_0^{(h)} &= u_0 \end{aligned}$$

mit  $t_i^{(h)} = ih$  zur Approximation der Lösung  $u$  des Anfangswertproblems

$$\begin{aligned} u'(t) &= f(t, u(t)) \\ u(0) &= u_0. \end{aligned}$$

von zweiter Ordnung konsistent ist.

**Aufgabe 3** (4 Punkte)

(a) Lösen Sie das Anfangswertproblem

$$\begin{cases} u' = -\frac{1}{u}\sqrt{1-u^2}, \\ u(0) = 1 \end{cases} \quad (*)$$

mittels Separation der Variablen.

(b) Besitzt das Anfangswertproblem (\*) noch weitere Lösungen?

(c) Ermitteln Sie für eine gegebene (konstante) Schrittweite  $\tau > 0$  mit Hilfe des Euler-Verfahrens eine diskrete Lösung  $u_n$  ( $n = 0, 1, 2, \dots$ ).

#### Aufgabe 4

(4 Punkte)

Wir wollen das Anfangswertproblem

$$u'(t) - \tan(t) u(t) = \cos(t) u(t)^4 \quad \text{für } t \in ]0, 1[ ,$$
$$u(0) = \frac{1}{2}$$

lösen. Bestimmen Sie zunächst die exakte Lösung  $u$  des Anfangswertproblems. Berechnen Sie zu gegebener Zeitschrittweite  $\Delta t = \frac{1}{4}$  die numerische Lösung mit Hilfe

- (a) des explizites Euler-Verfahrens,
- (b) des Heun-Verfahrens.

Berechnen Sie den Approximationfehler zum Zeitpunkt  $t = 1$  für die numerischen Lösungen.

**Hinweis:** In der Pfingstpause findet kein Übungsbetrieb statt, die Übungsgruppen finden in der ersten Juni Woche statt.

---

Die Vorlesungshomepage finden Sie unter

<http://aam.uni-freiburg.de/abtlg/wissmit/agkr/malkmust/lehre/SS15/Ubungen>