Abteilung für
Angewandte Mathematik

Dr. M. Nolte
T. Malkmus

10.06.2015

Übung zur Vorlesung

Numerik für Differentialgleichungen

SS 2015 — Blatt 4

Abgabe: Mittwoch, den 24.06.2015, vor der Vorlesung

Aufgabe 1 (Zentraler Differenzen Quotient als Mehrschrittverfahren) (4 Punkte)
Betrachten Sie für das Anfangswert Problem

$$\begin{aligned} u'(t) &= f(t, u(t)) \\ u(0) &= u_0 \end{aligned}$$

das numerische Verfahren:

$$u^{n+1} = u^{n-1} + 2hf(t^n, u^n) \ .$$

Schreiben Sie dieses Verfahren als lineares Mehrschrittverfahren und zeigen Sie, dass es Konsistenz Ordnung 2 hat.

Aufgabe 2 (Notwendige Bedingung für Runge-Kutta Verfahren) (4 Punkte)
Zeigen Sie, dass ein $s-$stufgiges Runge-Kutta Verfahren Konsistenz Ordnung 3 hat, falls gilt:

$$\sum_{i=1}^{s} b_i = 1 \ , \qquad \sum_{i,j=1}^{s} b_i A_{ij} = \frac{1}{2} \ ,$$

$$\sum_{i,j,k=1}^{s} b_i A_{ij} A_{ik} = \frac{1}{3} \ , \ \sum_{i,j,k=1}^{s} b_i A_{ij} A_{jk} = \frac{1}{6}$$

wenn das Runge-Kutta Verfahren mit $A \in \mathbb{R}^{s \times s}$ und $b, c \in \mathbb{R}^s$ durch das Buchter-Tableau:

$$\begin{array}{c|c} c & A \\ \hline & b^T \end{array}$$

gegeben ist.

Aufgabe 3 (4 Punkte)
Zeigen Sie, dass die Gauß-Quadratur

$$\int_0^1 f(x)dx \approx \sum_{i=1}^{n} w_i f(x_i)$$

mit $n = 2$, $w_1 = w_2 = \frac{1}{2}$, $x_1 = \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{12}}$ und $x_2 = \frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{12}}$ angewendet auf

$$u^{n+1} = u^n + \int_{t^n}^{t^{n+1}} f(u(s), s)ds$$

einem Runge-Kutta Verfahren mit Konsistenz Ordnung 3 entspricht. Geben Sie das Butcher-Tableau dieses Verfahrens an.
Hinweis: n-Punkt Gauß Quadratur sind von der Ordnung $2n - 1$.

Aufgabe 4 (4 Punkte)

Geben Sie alle Runge-Kutta Verfahren mit Konsistenz Ordnung 2 an, die sich in folgender Form schreiben lassen:

$$\begin{array}{c|ccc} 0 & & & \\ c_2 & c_2 & & \\ c_3 & 0 & c_3 & \\ \hline & b_1 & b_2 & 1 \end{array}$$

Die Vorlesungshomepage finden Sie unter

`http://aam.uni-freiburg.de/abtlg/wissmit/agkr/malkmust/lehre/SS15/Ubungen`