Abteilung für
Angewandte Mathematik

Dr. M. Nolte
T. Malkmus

24.06.2015

Übung zur Vorlesung

Numerik für Differentialgleichungen

SS 2015 — Blatt 5

Abgabe: Mittwoch, den 08.07.2015, vor der Vorlesung

Aufgabe 1 (4 Punkte)

Seien $\lambda_1, ..., \lambda_l$ die Nullstellen des Poylnoms

$$q(\lambda) = \sum_{i=0}^{m} \alpha_i \lambda^i$$

mit Vielfachheit $\sigma_1, ..., \sigma_l$. Zeigen Sie, dass sich jede Lösung der Differenzengleichung

$$\sum_{i=0}^{m} \alpha_i u_i = 0$$

mit eindeutig bestimmten Polynomen $p_i \in \mathbb{P}^{\sigma_i - 1}$, schreiben lässt als:

$$u_j = \sum_{i=0}^{l} p_i(\lambda) \lambda_i^j \ .$$

Aufgabe 2 (Backward-Differentation-Formula) (4 Punkte)

Zeigen Sie, dass das lineare Mehrschrittverfahren:

$$\frac{137}{60} y^{n+1} - 5y^n + 5y^{n-1} - \frac{10}{3} y^{n-2} + \frac{5}{4} y^{n-3} - \frac{1}{5} y^{n-4} = \Delta t f^{n+1}$$

nullstabil ist. Bestimmen Sie die Konsistenz Ordnung dieses Verfahrens.

Aufgabe 3 (4 Punkte)

Sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ eine reguläre Matrix und sei $u_0 \in \mathbb{R}^n$. Zeigen Sie, dass

$$u(t) = \exp(At) u_0$$

Lösung des Anfangswertproblems

$$\begin{cases} u'(t) = Au(t) & \text{für } t > 0, \\ u(0) = u_0 \end{cases}$$

ist. Dabei ist

$$\exp(A) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!}.$$

Aufgabe 4 (4 Punkte)

Lösen Sie mit Hilfe der Matrix-Exponentialfunktion das homogene Differentialgleichungssystem

$$\begin{aligned} u_1' &= u_1 - u_2 - u_3, \\ u_2' &= u_1 + 3u_2 + u_3, \\ u_3' &= -3u_1 + u_2 - u_3 \end{aligned}$$

zu den Anfangswerten $u_1(0) = 1$, $u_2(0) = 0$, $u_3(0) = 4$.

Die Vorlesungshomepage finden Sie unter

`http://aam.uni-freiburg.de/abtlg/wissmit/agkr/malkmust/lehre/SS15/Ubungen`