Dipl.-Math. Christoph Gersbacher
Dipl.-Math. Andrea Korsch
Abteilung für Angewandte Mathematik

29. April 2015

Übungsblatt 1

Aufgabe 1 (Satz von Kahan)
Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mit $a_{ii} \neq 0$, $i = 1, \dots, n$. Sei weiter $G_\omega \in \mathbb{R}^{n\times n}$ die Iterationsmatrix des zugehörgien SOR-Verfahrens mit Relaxationsparameter ω. Zeigen Sie, dass

$$\rho(G_\omega) \geq |\omega - 1|$$

für alle $\omega \in \mathbb{R}$.

Aufgabe 2 (Richardson-Verfahren)
Betrachten Sie das sogenannte *Richardson-Verfahren*

$$x^{k+1} = (I - \omega A)x^k + \omega b, \qquad k = 0, 1, \dots,$$

mit $\omega \in \mathbb{R}$ und $x^0 \in \mathbb{R}^n$ beliebig. Dies entspricht einem Splitting-Verfahren bei Wahl der Iterationsmatrix

$$G_\omega = I - \omega A.$$

Sei A symmetrisch, positiv definit mit λ_{min} und λ_{max} als kleinstem bzw. größtem Eigenwert. Zeigen Sie:

i) Es ist $\rho(G_\omega) = \max\{|1 - \omega\lambda_{max}|,\ |1 - \omega\lambda_{min}|\}$ für alle $\omega \in \mathbb{R}$.

ii) Das Richardson-Verfahren konvergiert genau dann, wenn $\omega \in (0, 2/\lambda_{max})$ ist.

iii) Der Wert $\omega_* = \frac{2}{\lambda_{max}+\lambda_{min}}$ minimiert den Spektralradius $\rho(G_\omega)$ für $\omega \in \mathbb{R}$.

iv) Es ist $\rho(G_{\omega_*}) = \frac{\lambda_{max}-\lambda_{min}}{\lambda_{max}+\lambda_{min}}$.

Aufgabe 3
Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, so dass das Gesamt- bzw. das Einzelschrittverfahren für alle rechten Seiten $b \in \mathbb{R}^n$ und alle Startwerte $x^0 \in \mathbb{R}^n$ konvergiert. Sei $D \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eine invertierbare Diagonalmatrix – bleibt die Konvergenz der Verfahren erhalten, wenn A durch AD bzw. DA ersetzt wird?

Aufgabe 4 (Reguläres Splitting)
Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ und $M, N \in \mathbb{R}^{n\times n}$, M regulär, mit $A = M - N$. Zeigen Sie: Es gilt $\rho(M^{-1}N) < 1$ genau dann, wenn A regulär und A^{-1} nichtnegativ ist. Dabei heißt eine Matrix A nichtnegativ, kurz $A \geq 0$, wenn alle Matrixelemente nichtnegativ sind.