03. Juni 2015

Übungsblatt 3

Aufgabe 1

i) Sei A symmetrisch und positiv definit und $\mathcal{L} = \mathcal{K}$. Zeigen Sie Dann ist ein Vektor $\tilde{x}$ genau dann das Ergebnis einer (orthogonalen) Projektionsmethode auf $\mathcal{K}$ mit Startvektor x_0, wenn

$$\|x_* - \tilde{x}\|_A = \min_{x \in x_0 + \mathcal{K}} \|x_* - x\|_A.$$

ii) Sei A eine beliebige quadratische Matrix und sei $\mathcal{L} = A\mathcal{K}$. Dann ist der Vektor $\tilde{x}$ genau dann das Ergebnis einer Projektionsmethode auf $\mathcal{K}$ orthogonal zu $\mathcal{L}$ mit Startvektor x_0, wenn

$$\|b - A\tilde{x}\|_2 = \min_{x \in x_0 + \mathcal{K}} \|b - Ax\|_2.$$

Aufgabe 2

Seien $a^1, ..., a^n$ linear unabhängige Vektoren. Zeigen Sie, dass das Gram-Schmidt-Verfahren und das Modifizierte Gram-Schmidt-Verfahren theoretisch äquivalent sind. Dabei sei das Gram-Schmidt-Verfahren gegeben durch

$$v^1 := a^1/\|a^1\|, \qquad v^{n\prime} := a^1 - \sum_{i=1}^{n-1} \frac{(v^i, a^n)}{(v^i, v^i)} v^i, \qquad v^n := \frac{v^{n\prime}}{\|v^{n\prime}\|}$$

und das Modifizierte-Gram-Schmidt-Verfahren durch

$$\begin{aligned}
& h_{11} := \|a^1\|; \\
& v^1 \;\; := a^1/h_{11}; \\
& FOR \quad j = 2 : n \\
& \qquad v^j := a^j; \\
& \qquad FOR \quad i = 1 : (j-1) \\
& \qquad\qquad h_{ij} := (v^i)^T v^j; \\
& \qquad\qquad v^j \;\; := v^j - h_{ij} v^i; \\
& \qquad END \\
& \qquad h_{jj} := \|v^j\|; \\
& \qquad v^j \;\; := v^j/h_{jj}; \\
& END.
\end{aligned}$$

Aufgabe 3

Bringen Sie die Hessenberg Matrix A

$$\begin{pmatrix} \sqrt{3} & \frac{1}{2}\sqrt{3} - \frac{1}{2\sqrt{2}} & \sqrt{3} + \frac{1}{2\sqrt{2}} \\ 1 & \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} & 1 - \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{7}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

durch Givens-Rotationen auf obere Dreiecksform.

Aufgabe 4 (Householder Arnoldi)
Das Householder-Arnoldi-Verfahren liefert eine Orthonormalbasis des Krylov-Raums $\mathcal{K}_k(r^0, A)$ für $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ und $r^0 \in \mathbb{R}^n$. Der Algorithmus lautet wie folgt:

> Setze $z^1 = r^0/\|r^0\|$.
> Für $j = 1, \dots, k+1$:
> Bestimme den Householder-Einheitsvektor $w^j \in \mathbb{R}^n$ mit $w^j = 0$ für $j = 1, \dots, j-1,$ so, dass $(H_j z^j)_i = 0$ für $i = j+1, \dots, n,$ wobei $H_j = I - 2w^j(w^j)^\top$.
> $h^{j-1} = H_j z^j$,
> $v^j = H_1 H_2 ... H_j e_j$,
> $z^{j+1} = H_j H_{j-1} ... H_1 A v^j$, falls $j \leq k$.

Zeigen Sie, dass mit

$$V_k = (v^1 \; v^2 r \; \dots \; v^k) \in \mathbb{R}^{n\times k},$$
$$\overline{H}_k = (h^j)_i \in \mathbb{R}^{(k+1)\times k}$$

gilt: $AV_k = V_{k+1}\overline{H}_k$.