Orthogonale Fehlermethoden
Übung zur Vorlesung im Sommersemester 2015
Dipl.-Math. Christoph Gersbacher
Dipl.-Math. Andrea Korsch
Abteilung für Angewandte Mathematik

19. Juni 2015

Übungsblatt 4

Aufgabe 1
Arbeiten Sie das GMRES-Verfahren 3.2 soweit detailiert aus, dass es sich in einem Programm realisieren ließe.

Aufgabe 2
Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ symmetrisch. Leiten Sie aus dem Arnoldi-Verfahren 3.3, welches eine Orthonormalbasis des Raumes $\mathcal{K}_r(r^0, A)$ berechnet, das Lanczos-Verfahren 3.28 zur Matrix A her.

Aufgabe 3
Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ diagonalisierbar, also $A = XDX^{-1}$ mit einer regulären Matrix $X \in \mathbb{R}^{n\times n}$ und einer Diagonalmatrix $D = \mathrm{diag}(\lambda_1, ..., \lambda_n)$. Zeigen Sie, dass dann gilt:

$$\|r^k\|_2 \leq \kappa_2(X) \max_{\lambda\in\sigma(A)} |p(\lambda)| \|r^0\|$$

für jedes Polynom p vom Höchstgrad k mit $p(0) = 1$, wobei das GMRES-Verfahren auf das Gleichungssystem $Ax = b$ mit einem beliebigen Startvektor x^0 anwenden und $\kappa_2(X)$ die Spektral-Kondition der Matrix X bezeichnet.

Aufgabe 4
Betrachten Sie ein lineares Gleichungssystem $Ax = b$ mit einer diagonalisierbaren Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, welche die k verschiedenen Eigenwerte $\lambda_1, ..., \lambda_k$ besitze. Zeigen Sie, dass dann das auf dieses Gleichungssystem angewandte GMRES-Verfahren nach spätestens k Iterationen mit der exakten Lösung von $Ax = b$ abbricht.

Hinweis: Wählen Sie in Aufgabe 3 ein geeignetes Polynom.