

## Übungsblatt 5

### Aufgabe 1

Seien  $\{v^1, \dots, v^k\}$  und  $\{w^1, \dots, w^k\}$  bi-orthogonal, d. h.

$$\begin{aligned}(v^i, w^i) &\neq 0 \quad (i = 1, \dots, k), \\(v^i, w^j) &= 0 \quad (i, j = 1, \dots, k; i \neq j).\end{aligned}$$

Zeigen Sie, dass dann die Vektoren  $v^1, \dots, v^k$  bzw.  $w^1, \dots, w^k$  linear unabhängig sind.

### Aufgabe 2

Zeigen Sie: Bricht das BiCG-Verfahren nicht vorzeitig ab, gelten

$$\begin{aligned}\text{span}\{p^0, \dots, p^{k-1}\} &= \text{span}\{r^0, \dots, r^{k-1}\} \\&= \text{span}\{r^0, Ar^0, \dots, A^{k-1}r^0\} \\&= \mathcal{K}_k(A, r^0)\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}\text{span}\{\hat{p}^0, \dots, \hat{p}^{k-1}\} &= \text{span}\{\hat{r}^0, \dots, \hat{r}^{k-1}\} \\&= \text{span}\{\hat{r}^0, A^\top \hat{r}^0, \dots, (A^\top)^{k-1} \hat{r}^0\} \\&= \mathcal{K}_k(A^\top, \hat{r}^0).\end{aligned}$$

### Aufgabe 3

Implementieren Sie das GMRES-Verfahren anhand Ihrer Ausarbeitung von Aufgabe 1, Blatt 4. Testen Sie ihr Programm anhand selbstgewählter Beispiele. Sie haben für diese Aufgabe bis zum 20. Juli 2015 Zeit!