Numerik (Zweiter Teil der zweisemestrigen Veranstaltung)
Praktische Übung zur Vorlesung im Sommersemester 2015
Prof. Dr. Dietmar Kröner
Dipl.-Math. Christoph Gersbacher
Abteilung für Angewandte Mathematik

05. Juni 2015

Übungsblatt 3

Abgabe bis 17. Juni 2015 per E-Mail an den Tutor

Aufgabe 1 (Kubische Spline-Interpolation) **(4 Punkte)**

Seien $(x_j, u_j)_{j=0,\dots,n+1}$ zu interpolierende Daten mit $x_0 < x_1 < \dots < x_{n+1}$. Gesucht ist eine stückweise kubische Funktion $p \in C^2([x_0, x_{n+1}])$, die die Daten interpoliert, d. h.

$$p(x_j) = u_j \quad (j = 0, \dots, n+1).$$

Diese Funktion ist eindeutig bestimmt, wenn wir z. B. zusätzlich fordern, dass

$$p''(x_0) = p''(x_{n+1}) = 0.$$

Seien $m_j = p''(x_j)$ die zunächst unbekannten Momente von p. Weiter bezeichnen wir mit $p_j = p(x)|_{[x_j, x_{j+1}]}$ die Einschränkung von p auf das Intervall $[x_j, x_{j+1}]$. Dann gilt

$$p_j(x) = \frac{1}{6h_j}\Big(m_{j+1}\big(x - x_j\big)^3 + m_j\big(x_{j+1} - x\big)^3\Big) + b_j\Big(x - \frac{x_{j+1} + x_j}{2}\Big) + a_j \in P^3$$

mit $h_j = x_{j+1} - x_j$. Sind die Momente $(m_j)_{j=0,\dots,n+1}$ erst bekannt, lassen sich die Konstanten a_j, b_j über die Interpolationsbedingung

$$\begin{aligned} u_j = p_j(x_j) &= \frac{h_j^2}{6}m_j - \frac{h_j}{2}b_j + a_j, \\ u_{j+1} = p_j(x_{j+1}) &= \frac{h_j^2}{6}m_{j+1} + \frac{h_j}{2}b_j + a_j \end{aligned}$$

bestimmen. Aus der weiteren Bedingung $p_j'(x_{j+1}) = p_{j+1}'(x_{j+1})$ erhält man

$$\frac{h_j}{6}m_j + \frac{1}{3}(h_j + h_{j+1})m_{j+1} + \frac{h_{j+1}}{6}m_{j+2} = \frac{1}{h_{j+1}}(u_{j+2} - u_{j+1}) - \frac{1}{h_j}(u_{j+1} - u_j).$$

Die Momente $(m_j)_{j=1,\dots,n}$ lassen sich also über die Lösung eines linearen Gleichungssystems bestimmen:

$$\begin{pmatrix} 1 & \lambda_0 & & & \\ \mu_1 & 1 & \lambda_1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \mu_{n-2} & 1 & \lambda_{n-2} \\ & & & \mu_{n-1} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m_1 \\ m_2 \\ \vdots \\ m_{n-1} \\ m_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3u[x_0, x_1, x_2] \\ 3u[x_1, x_2, x_3] \\ \vdots \\ 3u[x_{n-2}, x_{n-1}, x_n] \\ 3u[x_{n-1}, x_n, x_{n+1}] \end{pmatrix},$$

wobei

$$\lambda_j = \frac{h_{j+1}}{2(h_j + h_{j+1})}, \quad \mu_j = \frac{h_j}{2(h_j + h_{j+1})}$$

und die zweiten dividierten Differenzen definiert sind durch

$$u[x_j, x_{j+1}, xj + 2] = \frac{u[x_{j+1}, xj + 2] - u[x_j, x_{j+1}]}{x_{j+2} - x_j}.$$

Implementieren Sie ein Programm zur kubischen Spline-Interpolation. Zur Lösung des Gleichungssystems für die Momente können Sie den Algorithmus (und Ihren Code) von Blatt 3 aus dem letzten Wintersemester verwenden. Testen Sie Ihr Programm anhand selbstgewählter Beispiele. Vergleichen Sie die Ergebnisse mit denen der klassischen Polynominterpolation, für die Sie bereits zwei Verfahren implementiert haben.