

Übungsblatt 4

Abgabe bis 01. Juli 2015 per E-Mail an den Tutor

Aufgabe 1 (Schnelle Fourier-Transformation)

(4 Punkte)

Sei $n = 2^Q - 1$ und es seien Daten $(x_k, y_k)_k$ mit

$$x_k = \frac{2k\pi}{n+1} \quad (k = 0, \dots, n)$$

gegeben. Gesucht ist das interpolierende trigonometrische Polynom

$$t_n^*(x) = \sum_{k=0}^n c_k e^{ikx}$$

mit $t_n^*(x_k) = y_k$ für $k = 0, \dots, n$.

Sei $\hat{w} = e^{-i\frac{2\pi}{2^Q}}$. Implementieren Sie den folgenden Algorithmus (*Schnelle Fouriertransformation*) zur Bestimmung der Koeffizienten $c_k \in \mathbb{C}$ von t_n^* :

```
Für  $l = 0, \dots, 2^Q - 1$  {  
  Setze  $C[l] = y_l$   
  Setze  $W[l] = \hat{w}^l$   
}  
Für  $q = 0, \dots, Q - 1$  {  
  Für  $k = 0, \dots, 2^{Q-q-1} - 1$  {  
    Für  $l = 0, \dots, 2^q - 1$  {  
      Setze  $u = C[k \cdot 2^q + l]$   
      Setze  $v = W[l \cdot 2^{Q-q-1}] \cdot C[(k + 2^{Q-q-1}) \cdot 2^q + l]$   
      Setze  $D[k \cdot 2^{q+1} + l] = \frac{1}{2}(u + v)$   
      Setze  $D[k \cdot 2^{q+1} + l + 2^q] = \frac{1}{2}(u - v)$   
    }  
  }  
}  
Für  $l = 0, \dots, 2^Q - 1$  {  
  Setze  $C[l] = D[l]$   
}  
}
```

Dabei sind C, D und W Vektoren der Länge 2^Q . Am Ende des Algorithmus sind die gesuchten Werte c_k in den Einträgen $C[k]$ gespeichert. Beachten Sie, dass die C-Standardbibliothek mit der Datei `complex.h` eine Reihe von Datentypen und Funktionen für komplexe Zahlen zur Verfügung stellt. Testen Sie Ihre Implementierung anhand der Funktion

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{falls } 0 \leq x < \pi, \\ 2\pi - x, & \text{falls } \pi \leq x < 2\pi, \end{cases}$$

indem Sie im Algorithmus $y_k = f(x_k)$, $k = 0, \dots, n$, wählen. Schreiben Sie eine Methode, die das trigonometrische Interpolationspolynom in einem Punkt auswertet und überprüfen Sie die Interpolationseigenschaft. Lassen Sie sich für $Q = 4, 6, 8, 10$ das Interpolationspolynom mit dem Programm `gnuplot` anzeigen.

Alle Übungsaufgaben finden Sie auf der Homepage zur Vorlesung:

<http://portal.uni-freiburg.de/aam/abtlg/wissmit/agkr/gersbacher/lehre/SS15/numerik/FrontPage>