Abteilung für
Angewandte Mathematik

Dr. M. Nolte
T. Malkmus

08.06.2015

Praktische Übung zur Vorlesung

Numerik für Differentialgleichungen

SS 2015 — Blatt 3

Abgabe: Sonntag, den 21.06.2014, 23:59 via Email an den Assistenten
Ziel ist es das Anfangswertproblem

$$\begin{aligned} u'(t) &= f(u,t) = 2tu(t) \quad \text{für } t \in]0,T[\\ u(0) &= u_0 = 2 \end{aligned} \tag{1}$$

numerisch zu lösen.

Aufgabe 1 (2 Punkt)

Zu gegebener Zeitschrittweite Δt und Zeitpunkten $t^n := n\Delta t$ definieren wir $u_{\Delta t}(t^n)$ durch ein m-stufiges Runge-Kutta–Verfahren:

$$\begin{aligned} k_s &= f(f^n + \Delta t c_s, u_{\Delta t}(t^n) + \sum_{j<s} A_{s,j} k_j), \quad s = 1, ..., m \\ u_{\Delta t}(t^{n+1}) &= u_{\Delta t}(t^n) + \Delta t \sum_{s=1}^{m} b_s k_s \\ u_{\Delta t}(t^0) &= 2 \ . \end{aligned}$$

Dabei ist $A \in \mathbb{R}^{m \times m}$ eine strikte untere Dreiecksmatrix und $c, b \in \mathbb{R}^m$. Man schreibt A, c und b auch als Butcher-Tableau:

$$\begin{array}{c|c} c & A \\ \hline & b^T \end{array}$$

Implementieren Sie dieses Verfahren durch eine Methode / Funktion, die das Butcher-Tableau B, die Funktion f, die Zeitschrittweite Δt, der Zeitpunkt t^n und die Lösung zum Zeitpunkt t^n $u_{\Delta t}(t^n)$ als Argumente hat. Der Rückgabewert dieser Funktion soll die Lösung $u_{\Delta t}(t^{n+1})$ zum neuen Zeitpunkt t^{n+1} sein. Speichern Sie die Lösung $u_{\Delta t}$ in einem Vektor ab. Die Anfangsdaten sollen in $u[0]$ initialisiert werden.
Folgende Informationen sollen im Butcher-Tableau B abgespeichert werden: die Anzahl an Stufen m, die Matrix A und die Vektoren c, b.

Aufgabe 2 (1 Punkt)

Programmieren Sie das Butcher-Tableau für das explizite Euler-Verfahren. Implementieren Sie ferner das Butcher-Tableau des Heun-Verfaren 2er und 3er Ordnung sowie das Butcher-Tableau des klassischen Runge-Kutta-Verfahren (4. Ordnung):

$$\begin{array}{c|cccc} 0 & & & & \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & & & \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & & \\ 1 & 0 & 0 & 1 & \\ \hline & \frac{1}{6} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} \end{array}$$

Aufgabe 3 (1 Punkt)

Bestimmen Sie für $k > 1$ und $\Delta t_k = 0.5\Delta t_{k-1}$ den Fehler und die experimentelle Konvergenzordnung für das klassische Runge-Kutta Verfahrena an. Vergleichen Sie die Ergebnisse mit denen des expliziten Euler Verfahrens.