

praktische Übung zur Vorlesung

Theorie und Numerik hyperbolischer Differentialgleichungen II

WS 2016/17 — Blatt 1

Abgabe: Freitag, den 19.05.2017, vor der Vorlesung

Aufgabe 1

(8 Punkte)

Betrachten wir das Anfangsrandwertproblem für die eindimensionale Burgers-Gleichung

$$\begin{aligned}\partial_t u + \partial_x \frac{u^2}{2} &= 0 && \text{in }]a, b[\times]0, T[, \\ u(x, 0) &= u_0(x) && \text{für } x \in]a, b[, \\ u(x, t) &= u_0(x) && \text{für } (x, t) \in \{a, b\} \times]0, T[.\end{aligned}$$

Implementieren Sie entweder das Finite-Volumen oder das Finite-Differenzen Verfahren zur Lösung des obigen Problems. Verwenden Sie dabei einen monotonen numerischen Fluss Ihrer Wahl.

Schreiben Sie die Ausgabe zu verschiedenen Zeitpunkten im VTK-Dateiformat. Ein Beispiel finden Sie am Ende des Übungsblattes.

Testen Sie Ihre Implementierung anhand des Riemann-Anfangsdaten

$$u_0(x) = \begin{cases} 1, & \text{falls } x < 0, \\ 0, & \text{falls } x > 0. \end{cases}$$

Aufgabe 2

(8 Punkte)

Eine mehrdimensionale Variante der Burgers-Gleichung ist gegeben durch

$$\begin{aligned}\partial_t u + \nabla \cdot \left(v \frac{u^2}{2} \right) &= 0 && \text{in } \Omega \times]0, T[, \\ u(x, 0) &= u_0(x) && \text{für } x \in \Omega, \\ u(x, t) &= u_0(x) && \text{für } (x, t) \in \partial\Omega \times]0, T[.\end{aligned}$$

Lösen Sie dieses Problem in $\Omega =]0, 1[^2$ für ein nicht verschwindendes, divergenzfreies Geschwindigkeitsfeld Ihrer Wahl mittels eines Finite-Volumen Verfahrens unter Verwendung des Lax-Friedrichs Flusses. Für die Anfangsdaten nehmen Sie

$$u_0(x) = \chi_{B_{0.3}(0.5, 0.5)}.$$

Schreiben Sie die Ergebnisse zu verschiedenen Zeitpunkten im VTK-Dateiformat.

Beispiel

Die Ausgabe für einen Zeitpunkt in Aufgabe Aufgabe 1 könnte wie folgt aussehen:

```
<?xml version="1.0"?>
<VTKFile byte_order="LittleEndian" type="UnstructuredGrid" version="0.1">
  <UnstructuredGrid>
    <Piece NumberOfCells="16" NumberOfPoints="32">
      <CellData Scalars="concentration">
        <DataArray Name="concentration" NumberOfComponents="1" format="ascii" type="Float64">
          1.0000000000000000e+00 1.0000000000000000e+00 1.0000000000000000e+00
          1.0000000000000000e+00 1.0000000000000000e+00 1.0000000003146539e+00
          9.9999562258929531e-01 1.0000410964549649e+00 9.9644823377768021e-01
          9.9354766623018709e-01 8.9068570777684064e-01 6.5695468053746753e-01
          6.2223444810299999e-02 1.0464782094198383e-04 1.6938500363365772e-11
          3.1326987031030885e-26
        </DataArray>
      </CellData>
      <Points>
        <DataArray Name="Coordinates" NumberOfComponents="3" format="ascii" type="Float64">
          0.0000000000000000e+00 0.0000000000000000e+00 0.0000000000000000e+00
          6.2500000000000000e-02 0.0000000000000000e+00 0.0000000000000000e+00
          6.2500000000000000e-02 0.0000000000000000e+00 0.0000000000000000e+00
          1.2500000000000000e-01 0.0000000000000000e+00 0.0000000000000000e+00
          1.2500000000000000e-01 0.0000000000000000e+00 0.0000000000000000e+00
          1.8750000000000000e-01 0.0000000000000000e+00 0.0000000000000000e+00
          1.8750000000000000e-01 0.0000000000000000e+00 0.0000000000000000e+00
          2.5000000000000000e-01 0.0000000000000000e+00 0.0000000000000000e+00
          2.5000000000000000e-01 0.0000000000000000e+00 0.0000000000000000e+00
          3.1250000000000000e-01 0.0000000000000000e+00 0.0000000000000000e+00
          3.1250000000000000e-01 0.0000000000000000e+00 0.0000000000000000e+00
          3.7500000000000000e-01 0.0000000000000000e+00 0.0000000000000000e+00
          3.7500000000000000e-01 0.0000000000000000e+00 0.0000000000000000e+00
          4.3750000000000000e-01 0.0000000000000000e+00 0.0000000000000000e+00
          4.3750000000000000e-01 0.0000000000000000e+00 0.0000000000000000e+00
          5.0000000000000000e-01 0.0000000000000000e+00 0.0000000000000000e+00
          5.0000000000000000e-01 0.0000000000000000e+00 0.0000000000000000e+00
          5.6250000000000000e-01 0.0000000000000000e+00 0.0000000000000000e+00
          5.6250000000000000e-01 0.0000000000000000e+00 0.0000000000000000e+00
          6.2500000000000000e-01 0.0000000000000000e+00 0.0000000000000000e+00
          6.2500000000000000e-01 0.0000000000000000e+00 0.0000000000000000e+00
          6.8750000000000000e-01 0.0000000000000000e+00 0.0000000000000000e+00
          6.8750000000000000e-01 0.0000000000000000e+00 0.0000000000000000e+00
          7.5000000000000000e-01 0.0000000000000000e+00 0.0000000000000000e+00
          7.5000000000000000e-01 0.0000000000000000e+00 0.0000000000000000e+00
          8.1250000000000000e-01 0.0000000000000000e+00 0.0000000000000000e+00
          8.1250000000000000e-01 0.0000000000000000e+00 0.0000000000000000e+00
          8.7500000000000000e-01 0.0000000000000000e+00 0.0000000000000000e+00
          8.7500000000000000e-01 0.0000000000000000e+00 0.0000000000000000e+00
          9.3750000000000000e-01 0.0000000000000000e+00 0.0000000000000000e+00
          9.3750000000000000e-01 0.0000000000000000e+00 0.0000000000000000e+00
          1.0000000000000000e+00 0.0000000000000000e+00 0.0000000000000000e+00
        </DataArray>
      </Points>
      <Cells>
        <DataArray Name="connectivity" NumberOfComponents="1" format="ascii" type="Int32">
          0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21 22 23 24 25 26
          27 28 29 30 31
        </DataArray>
        <DataArray Name="offsets" NumberOfComponents="1" format="ascii" type="Int32">
          2 4 6 8 10 12 14 16 18 20 22 24 26 28 30 32
        </DataArray>
        <DataArray Name="types" NumberOfComponents="1" format="ascii" type="UInt8">
          3 3 3 3 3 3 3 3 3 3 3 3 3 3 3 3
        </DataArray>
      </Cells>
    </Piece>
  </UnstructuredGrid>
</VTKFile>
```