Abteilung für
Angewandte Mathematik

Prof. Dr. D. Kröner
Dr. M. Nolte

03.05.2017

Übung zur Vorlesung

Theorie und Numerik hyperbolischer Differentialgleichungen II

WS 2016/17 — Blatt 1

Abgabe: Donnerstag, den 11.05.2017, vor der Vorlesung

Aufgabe 1 (4 Punkte)

Sei $T = (a,b) \times (c,d)$ ein Rechteck und sei $e = \{a\} \times (c,d)$ eine Kante von T. Zeigen Sie, dass für eine glatte Funktion $\varphi \in C^\infty(T)$ die folgende Ungleichung gilt:

$$\left| \frac{1}{|T|} \int_T \varphi(x)\, dx - \frac{1}{|e|} \int_e \varphi_{|e}(x)\, d\sigma(x) \right| \leq C\, \frac{\operatorname{diam} T}{|T|}\, \|\nabla\varphi\|_{L^1(T)}. \qquad (*)$$

Aufgabe 2 (4 Punkte)

Zeigen Sie, dass die Abschätzung $(*)$ unter affinen Transformationen erhalten bleibt, d.h., ist $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ affin und gilt die Abschätzung für ein $T \subset \mathbb{R}^2$ und ein $e \subset \partial T$, so gilt für alle $\varphi \in C^\infty(F(T))$:

$$\left| \frac{1}{|F(T)|} \int_{F(T)} \varphi(x)\, dx - \frac{1}{|F(e)|} \int_{F(e)} \varphi_{|F(e)}(x)\, d\sigma(x) \right| \leq C \operatorname{diam} F(T)\, \|\nabla\varphi\|_{L^1(F(T))}.$$

Aufgabe 3 (4 Punkte)

Sei g ein monotoner, numerischer Fluss, sei $k \in \mathbb{R}$ und sei $\lambda > 0$ hinreichend klein.
Zeigen Sie für $u, v \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}\big|u - \lambda\,[g(u,v) - g(u,u)] - k\big| + \lambda\big[g\big(\max\{u,k\}, \max\{v,k\}\big) - g\big(\min\{u,k\}, \min\{v,k\}\big)\big]& \\ \leq |u-k| + \lambda \operatorname{sgn}(u-k)\,[g(u,u) - g(k,k)]&.\end{aligned}$$

Aufgabe 4 (4 Punkte)

Sei $u_0 \in L^1(\mathbb{R}^2) \cap L^\infty(\mathbb{R}^2)$, $M := \|u_0\|_{L^\infty(\mathbb{R}^2)}$, sei $(T_i)_{i\in\mathbb{N}}$ eine Triangulierung des $\mathbb{R}^2$ und sei $\Delta t > 0$. Sei $(u_i^n)_{i,n\in\mathbb{N}}$ durch ein Finite-Volumen Verfahren mit monotonen numerischen Flüssen $(g_{i,l})_{\substack{i\in\mathbb{N}\\ l=1,\dots,3}}$ gegeben. Zeigen Sie, dass das Verfahren auf $B_M(0)$ monoton ist, falls folgende CFL-Bedingung gilt:

$$\Delta t \left(\sup_{i\in\mathbb{N}} \max_{l\in\{1,\dots,3\}} \|\partial_2 g_{i,l}\|_{L^\infty(B_0(M))} \right) \sup_{i\in\mathbb{N}} \frac{|\partial T_i|}{|T_i|} \leq 1.$$