Prof. Dr. D. Kröner
Dr. M. Nolte

11.05.2017

Übung zur Vorlesung

Theorie und Numerik hyperbolischer Differentialgleichungen II

WS 2016/17 — Blatt 2

Abgabe: Donnerstag, den 18.05.2017, vor der Vorlesung

Aufgabe 1 (4 Punkte)

Sei $u_0 \in L^\infty(\mathbb{R}^2) \cap BV(\mathbb{R}^2)$, sei $(T_i)_{i\in\mathbb{N}}$ eine Triangulierung des $\mathbb{R}^2$ und sei

$$u_j^0 := \frac{1}{|T_j|} \int_{T_j} u_0(x)\, dx.$$

Zeigen Sie:

$$h \sum_{j\in\mathbb{N}} \sum_{l=1}^{3} \big|u_{jl}^0 - u_j^0\big| \le C(u_0).$$

Aufgabe 2 (4 Punkte)

Betrachten wir das Anfangswertproblem

$$\begin{aligned} \partial_t u + \nabla\cdot(vu) &= 0 \quad \text{in } \mathbb{R}^2 \times [0,T],\\ u(\cdot,0) &= u_0 \quad \text{in } \mathbb{R}^2 \end{aligned}$$

mit einem gegebenen, divergenzfreien Geschwindigkeitsfeld $v \in C^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$ und gebebenen Anfangsdaten $u_0 \in L^\infty(\mathbb{R}^2) \cap BV(\mathbb{R}^2)$. Zu einer Triangulierung $(T_i)_{i\in\mathbb{N}}$ des $\mathbb{R}^2$ sei sei $(u_i^n)_{i,n\in\mathbb{N}}$ die approximative Lösung aus dem Finite-Volumen Verfahren. Zeigen Sie, dass folgende Abschätzung im allgemeinen nicht gilt:

$$h \sum_{j\in\mathbb{N}} \sum_{l=1}^{3} \big|u_{jl}^n - u_j^n\big| \le h \sum_{j\in\mathbb{N}} \sum_{l=1}^{3} \big|u_{jl}^0 - u_j^0\big|.$$

Aufgabe 3 (4 Punkte)

Sei (U,F) ein konvexes Entropie-Entropiefluss Paar und sei $(T_i)_{i\in\mathbb{N}}$ eine Triangulierung des $\mathbb{R}^2$. Zeigen Sie:

(a) Für den Lax-Friedrichs Fluss ist ein konsistenter, erhaltender numerischer Entropiefluss gegeben durch

$$G_{jl}^{LF}(u,v) = \nu_{jl} \cdot \frac{F(u)+F(v)}{2} + \frac{1}{2\lambda_{jl}}\big(U(u) - U(v)\big).$$

(b) Für den Engquist-Osher Fluss ist ein konsistenter, erhaltender numerischer Entropiefluss gegeben durch

$$G_{jl}^{EO}(u,v) = \int_0^u U'(\xi)\, \max\big\{(f\cdot\nu_{jl})'(\xi), 0\big\}\, d\xi + \int_0^v U'(\xi)\, \min\big\{(f\cdot\nu_{jl})'(\xi), 0\big\}\, d\xi + F(0).$$

Aufgabe 4 (4 Punkte)

Sei (U, F) ein konvexes Entropie-Entropiefluss Paar, sei $(T_i)_{i\in\mathbb{N}}$ eine Triangulierung des $\mathbb{R}^2$ und sei G_{jl} der numerische Entropiefluss zu einem numerischen Fluss g_{jl}. Zeigen Sie, dass die Bedingung

$$\partial_2 G_{jl}(u, v) = U'(v)\, \partial_2 g_{jl}(u, v) \quad \text{für fast alle } u, v \in \mathbb{R}$$

erfüllt ist, falls g_{jl} durch den Engquist-Osher Fluss oder den Lax-Friedrichs Fluss gegeben ist.