Prof. Dr. D. Kröner
Dr. M. Nolte

18.05.2017

Übung zur Vorlesung

Theorie und Numerik hyperbolischer Differentialgleichungen II

WS 2016/17 — Blatt 3

Abgabe: Donnerstag, den 01.06.2017, vor der Vorlesung

Aufgabe 1 (Euler-Gleichungen in primitiven Variablen) (4 Punkte)
Betrachten wir die eindimensionalen Euler-Gleichungen der Gasdynamik

$$\begin{aligned} \partial_t \rho + \partial_x(\rho v) &= 0, \\ \partial_t(\rho v) + \partial_x(\rho v^2 + p) &= 0, \\ \partial_t e + \partial_x\big(v(e+p)\big) &= 0 \end{aligned}$$

mit der Zustandsgleichung

$$p = (\gamma - 1)\left(e - \frac{\rho}{2}u^2\right) \tag{A1.1}$$

für ein $\gamma > 1$. Zeigen Sie unter passenden Glattheitsannahmen, dass diese Gleichungen in primitiven Variablen $U := (\rho, v, p)^T$ in quasilinearer Form

$$\partial_t U + A(U)\,\partial_x U = 0 \quad \text{mit} \quad A(U) = \begin{pmatrix} u & \rho & 0 \\ 0 & u & \frac{1}{\rho} \\ 0 & \rho\, a^2 & u \end{pmatrix}$$

geschrieben werden können, wobei $a := \sqrt{\frac{\gamma p}{\rho}}$ die Schallgeschwindigkeit ist.

Aufgabe 2 (Entropie für die Euler-Gleichungen) (4 Punkte)
Es gelte die Zustandagleichung aus Aufgabe 1. Wir definieren die Entropie

$$S := S_0 + c_v \log \frac{p}{(\gamma - 1)\rho^\gamma)}$$

mit Konstanten S_0 und c_v. Zeigen Sie unter Annahme der Massenerhaltung

$$\partial_t \rho + v\,\partial_x \rho + \rho\,\partial_x v = 0,$$

dass folgende Gleichungen unter passenden Glattheitsannahmen äquivalent sind:

$$\partial_t p + \rho\, a^2\,\partial_x v + v\,\partial_x p = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \partial_t S + \partial_x S = 0,$$

wobei $a := \sqrt{\frac{\gamma p}{\rho}}$ die Schallgeschindigkeit ist.

Aufgabe 3 (4 Punkte)
Zeigen Sie, dass die Eigenwerte $\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3$ und zugehörigen Eigenvektoren U_1, U_2, U_3 der Matrix $A(U)$ aus Aufgabe 1 gegeben sind durch

$$\lambda_1 = u - a, \qquad \lambda_2 = u, \qquad \lambda_3 = u + a,$$

$$U_1 = \begin{pmatrix} \rho \\ -a \\ \rho a^2 \end{pmatrix}, \quad U_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad U_3 = \begin{pmatrix} \rho \\ a \\ \rho a^2 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 4 (4 Punkte)

Stellen Sie die Matrix $A(U)$ aus Aufgabe 1 in der Form

$$A(U) = T(U)\, D(U)\, T^{-1}(U)$$

dar, wobei $D(U) \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ eine Diagonalmatrix und $T(U) \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ invertierbar ist. Berechnen Sie diese Matrizen explizit.

Hinweis: Verwenden Sie die Enthalpie $h = \frac{e+p}{\rho}$.