Abteilung für
Angewandte Mathematik

Prof. Dr. D. Kröner
Dr. M. Nolte

01.06.2017

Übung zur Vorlesung

Theorie und Numerik hyperbolischer Differentialgleichungen II

WS 2016/17 — Blatt 4

Abgabe: Freitag, den 16.06.2017, vor der Üebung

Aufgabe 1 (Hyperbolizität unter Variablentransformation) (4 Punkte)
Sei u eine glatte Lösung des strikt hyperbolosichen Systems

$$\partial_t u + A(u)\,\partial_x u = 0 \quad \text{in } \mathbb{R}\times]0,\infty[. \tag{$*$}$$

Für einen Diffeomorphismus $\Phi : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ definieren wir $\tilde{u} := \Phi(u)$. Zeigen Sie, dass $\tilde{u}$ Lösung eines strikt hyperbolischen Systems

$$\partial_t \tilde{u} + \tilde{A}(\tilde{u})\,\partial_x \tilde{u} = 0 \quad \text{in } \mathbb{R}\times]0,\infty[. \tag{$**$}$$

mit einem $\tilde{A} : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^{m\times m}$ ist. Geben Sie die transformierten Eigenwerte explizit an.

Aufgabe 2 (Riemanninvarianten, k-Riemanninvarianten) (4 Punkte)
Betrachten wir ein strikt hyperbolisches System von m Erhaltungsgleichungen

$$\partial_t u + \partial_x f(u) = 0 \quad \text{in } \mathbb{R}\times]0,\infty[.$$

Seien $\lambda_1(u) < \ldots < \lambda_m(u)$ die Eigenwerte und $r_1(u), \ldots, r_m(u)$ die Rechtseigenvektoren der Jacobimatrix $Df(u)$. Zeigen Sie, dass für $w \in C^1(\mathbb{R}^m)$ und $l \in \{1, \ldots, m\}$ folgende Aussagen äquivalent sind:

(a) w ist Riemanninvariante bzgl. λ_l, d.h. $Df(u)^T\,\nabla w = \lambda_l\,\nabla w$.

(b) w ist k-Riemanninvariante für alle $k \neq l$, d.h. $r_k(u) \cdot \nabla w = 0$.

Aufgabe 3 (Riemanninvarianten unter Variablentransformation) (4 Punkte)
Sei u eine glatte Lösung des strikt hyperbolosichen Systems $(*)$, sei $\Phi : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ ein Diffeomorphismus und sei $\tilde{u} := \Phi(u)$. Zeigen Sie die folgende Aussagen:

(a) Ist $w \in C^1(\mathbb{R}^m)$ eine Riemanninvariante bzgl. λ für $(*)$, so gibt es eine Riemanninvariante $\tilde{w} \in C^1(\mathbb{R}^m)$ bzgl. λ für $(**)$. Geben Sie diese explizit an.

(b) Ist $w \in C^1(\mathbb{R}^m)$ eine k-Riemanninvariante von $(*)$, so gibt es eine k-Riemanninvariante $\tilde{w} \in C^1(\mathbb{R}^m)$ für $(**)$. Geben Sie diese explizit an.

Aufgabe 4 (k-Riemanninvarianten für die Eulergleichungen) (4 Punkte)
Betrachten wir die Eulergleichungen der Gasdynamik in den Variablen $U = (\rho, v, S)^T$, d.h.

$$\partial_t U + A(U)\,\partial_x U = 0 \quad \text{mit} \quad A(U) = \begin{pmatrix} v & \rho & 0 \\ \frac{\gamma p}{\rho^2} & v & \frac{p}{\rho\, c_v} \\ 0 & 0 & v \end{pmatrix}$$

mit der Zustandsgleichung $p = (\gamma - 1)\left(e - \frac{\rho}{2}\, u^2\right)$ und der Entropie $S = S_0 + c_v \log \frac{p}{(\gamma-1)\rho^\gamma)}$.
Zeigen Sie, dass

(a) S und $u + \frac{2}{\gamma-1}\, a$ sind 1-Riemanninvarienten.

(b) u und p sind 2-Riemanninvarienten.

(c) S und $u - \frac{2}{\gamma-1}\, a$ sind 3-Riemanninvarienten.