Abteilung für Angewandte Mathematik

Prof. Dr. D. Kröner
Dr. M. Nolte

16.06.2017

Übung zur Vorlesung

Theorie und Numerik hyperbolischer Differentialgleichungen II

WS 2016/17 — Blatt 5

Abgabe: Donnerstag, den 22.06.2017, vor der Vorlesung

Aufgabe 1 (4 Punkte)

Betrachten wir das Riemannproblem für ein lineares System von Erhaltungsgleichungen

$$\partial_t u + A\,\partial_x u = 0 \quad \text{in } \mathbb{R}\times]0,\infty[, u(\cdot,0) \quad = u_L\,\chi_{]-\infty,0[} + u_R\,\chi_{]0,\infty[} \quad \text{in } \mathbb{R}.$$

Dabei sei $A \in \mathbb{R}^{m\times m}$ mit Eigenwerten $\lambda_1 < \ldots < \lambda_m$ und zugehörigen Linkseigenvektoren $l_1, \ldots, l_m$ und Rechtseigenvektoren $r_1, \ldots, r_m$, sodass $l_i^T\, r_j = \delta_{ij}$.

(a) Zeigen Sie, dass für $\alpha_1, \ldots, \alpha_m \in \mathbb{R}$ mit $u_R - u_L = \sum_{i=1}^m \alpha_i\, r_i$ und $u_k := u_L + \sum_{i=1}^k \alpha_i\, r_i$ gilt:

$$u_k = \sum_{i=1}^k l_i^T\, u_R\, r_i + \sum_{i=k+1}^m l_i^T u_L r_i \quad \text{für } k = 0, \ldots, m.$$

(b) Zeigen Sie, dass die Funktion

$$u(x,t) = \begin{cases} u_L, & \text{falls } x < \lambda_1\, t, \\ u_k, & \text{falls } \lambda_k\, t < x < \lambda_{k+1}\, t,\ k = 1, \ldots, m-1, \\ u_R, & \text{falls } x > \lambda_m\, t \end{cases}$$

schwache Lösung des Riemann problems ist.

Aufgabe 2 (Hyperbolizität und Entropie) (4 Punkte)

Für das System von Differentialgleichungen

$$\partial_t u + \partial_x f(u) = 0 \quad \text{in } \mathbb{R}\times]0,\infty[$$

mit $f \in C^2(\mathbb{R}^m)^m$ existiere ein strikt konvexes Entropiepaar $(U, F) \in C^2(\mathbb{R}^m) \times C^2(\mathbb{R}^m)^m$, d.h., D^2U ist positiv definit. Zeigen Sie, dass das System bereits hyperbolisch sein muss.

Aufgabe 3 (2 Punkte)

Sei $C \subset \mathbb{R}^m$ ein konvexer Kegel, sei $\pi \in C^2(]0,\infty[\times C)$ und sei

$$\omega(\rho, p) := \rho\,\pi\big(\tfrac{1}{\rho}, \tfrac{p}{\rho}\big).$$

Zeigen Sie, dass ω ist genau dann strikt konvex ist, wenn π strikt konvex ist.

Aufgabe 4 (Entropie für die Euler-Gleichungen der Gasdynamik) (6 Punkte)
Betrachten wir die eindimensionalen Euler-Gleichungen der Gasdynamik

$$\begin{aligned}
\partial_t \rho + \partial_x(\rho v) &= 0, \\
\partial_t(\rho v) + \partial_x(\rho v^2 + p) &= 0, \\
\partial_t e + \partial_x\big(v(e+p)\big) &= 0
\end{aligned}$$

mit der Zustandsgleichung $p = (\gamma - 1)\left(e - \frac{\rho}{2} u^2\right)$ und der Entropie $S = S_0 + c_v \log \frac{p}{(\gamma-1)\rho^\gamma}$.
Zeigen Sie, dass durch

$$\begin{aligned}
U(\rho, \rho v, e) &:= -\rho\, S \\
F(\rho, \rho v, e) &:= -\rho\, v\, S
\end{aligned}$$

ein Entropiepaar für die Eulergleichungen gegeben ist.