Abteilung für
Angewandte Mathematik

Prof. Dr. D. Kröner
Dr. M. Nolte

22.06.2017

Übung zur Vorlesung

Theorie und Numerik hyperbolischer Differentialgleichungen II

WS 2016/17 — Blatt 6

Abgabe: Donnerstag, den 29.06.2017, vor der Vorlesung

Aufgabe 1 (4 Punkte)

Betrachten wir die eindimensionalen Eulergleichungen der Gasdynamik in primitiven Variablen $U = (\rho, v, p)$,

$$\partial_t U + A(U)\,\partial_x U = 0 \quad \text{mit} \quad A(U) = \begin{pmatrix} u & \rho & 0 \\ 0 & u & \frac{1}{\rho} \\ 0 & \rho\, a^2 & u \end{pmatrix} \tag{$*$}$$

mit der Zustandsgleichung $p = (\gamma - 1)\left(e - \frac{\rho}{2} v^2\right)$.
Sei U eine k-Schockwelle

$$U(x,t) = \begin{cases} U_l = (\rho_l, v_l, p_l), & \text{falls } x < s\,t, \\ U_r = (\rho_r, v_r, p_r), & \text{falls } x > s\,t. \end{cases}$$

Zeigen Sie, dass für einen 1-Schock $p_r > p_l$ und für einen 3-Schock $p_r < p_l$ gilt.

Aufgabe 2 (4 Punkte)

Prüfen Sie, für die eindimensionalen Eulergleichungen der Gasdynamik in primitiven Variablen $(*)$, ob die k-Charakeristiken echt nichtlinear oder linear degeneneriert sind.

Aufgabe 3 (4 Punkte)

Sei $u(x,t) = v(\frac{x}{t})$ mit $v \in C^1(\mathbb{R})^m$ eine Lösung des strikt hyperbolischen Systems

$$\partial_t u + A(u)\,\partial_x u = 0 \quad \text{in } \mathbb{R}\times]0,\infty[.$$

Zeigen Sie:

(a) Es existiert ein $k \in \{1, \dots, m\}$, sodass

$$\nabla\lambda_k\big(v(\xi)\big) \cdot v'(\xi) = 0 \quad \text{für alle } \xi \in \mathbb{R}.$$

(b) Für k wie in Teil (a) ist die Funktion u eine k-Verdünnungswelle.

Aufgabe 4 (Rotationsinvarianz der Eulergleichungen) (4 Punkte)

Betrachten wir die zweidimensionalen Eulergleichungen der Gasdynamik,

$$\left.\begin{aligned} \partial_t \rho + \nabla\cdot(\rho v) &= 0, \\ \partial_t(\rho v) + \nabla\cdot(\rho v \otimes v + p\,\mathbb{I}) &= 0, \\ \partial_t e + \nabla\cdot\big((e+p)\,v\big) &= 0 \end{aligned}\right\} \quad \text{in } \mathbb{R}^2\times]0,\infty[$$

mit der Zustandsgleichung $p = (\gamma - 1)\left(e - \frac{\rho}{2}|v|^2\right)$.
Zeigen Sie, dass dieses System invariant unter einer Rotation

$$R = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

um einen beliebigen Winkel $\theta \in [0, 2\pi]$ ist, d.h., falls $(\rho, \rho v, e)(x, t)$ eine Lösung der Eulergleichungen ist, so ist auch $(\rho, R^{-1}\rho v, e)(R\,x, t)$ eine Lösung der Eulergleichungen.