Abteilung für
Angewandte Mathematik

Prof. Dr. D. Kröner
Dr. M. Nolte

29.06.2017

Übung zur Vorlesung

Theorie und Numerik hyperbolischer Differentialgleichungen II

WS 2016/17 — Blatt 7

Abgabe: Donnerstag, den 26.07.2017, vor der Vorlesung

Aufgabe 1 (4 Punkte)

Betrachten wir für das p-System

$$\left.\begin{aligned} \partial_t v - \partial_x u &= 0, \\ \partial_t u + \partial_x p &= 0 \end{aligned}\right\} \text{ in } \mathbb{R}\times]0,\infty[. \tag{$*$}$$

mit der Zustandsgleichung $p(v) = \frac{k}{v^\gamma}$ für $k = \gamma = 2$ zu den Riemann-Anfangsdaten

$$v(x,0) = 1,$$
$$u(x,0) = \begin{cases} -1, & \text{falls } x < 0, \\ 1, & \text{falls } x > 0. \end{cases}$$

Zeigen Sie, dass die Lösung aus zwei Verdünnungswellen besteht und berechnen Sie den Zwischenzustand (v^*, u^*).

Aufgabe 2 (4 Punkte)

Betrachten wir für das p-System $(*)$ mit der Zustandsgleichung $p(v) = \frac{k}{v^\gamma}$ für $k = \gamma = 2$ zu den Riemann-Anfangsdaten

$$v(x,0) = \begin{cases} 1, & \text{falls } x < 0, \\ 2, & \text{falls } x > 0, \end{cases}$$
$$u(x,0) = 0.$$

Aus welchen Wellen besteht die Lösung des Riemann-Problems? Leiten Sie eine algebraische Gleichung für den Zwischenzustand her.

Aufgabe 3 (8 Punkte)

Ein approximativer Riemann-Löser für Gleichungen der Form

$$\partial_t u + \partial_x f(u) = 0$$

mit einem Zwischenzustand wurde Harten, Lax und van Leer vorgeschlagen. Um das Riemann-Problem zu den Zustände u_l, u_r zu lösen, machen wir den Ansatz, dass die Lösung aus zwei unstetigen Wellen mit Geschwindigkeiten $s_l < s_r$ zusammengesetzt ist. Der numerische Fluss (HLL Fluss) g_{HLL} ist dann der Godunov-Fluss für die approximative Riemann-Lösung.

(a) Berechnen Sie den Zwischenzustand u^*.

(b) Finden Sie einfache Darstellung des HLL-Flusses $g_{HLL}(u_l, u_r)$.

(c) Zeigen Sie, dass der HLL-Fluss für $-s_l = s_r = \lambda > 0$ mit dem Lax-Friedrichs zusammenfällt.