Abteilung für
Angewandte Mathematik

Prof. Dr. D. Kröner
Dr. M. Nolte

17.07.2017

Übung zur Vorlesung

Theorie und Numerik hyperbolischer Differentialgleichungen II

WS 2016/17 — Blatt 9

Abgabe: Montag, den 24.07.2017, vor der Vorlesung

Aufgabe 1 (4 Punkte)

Leiten Sie für das lineare System

$$\partial_t u + A\,\partial_x u = 0$$

mit $A \in \mathbb{R}^{m\times m}$ konstant das zugehörige Godunov-Verfahren her. Zeigen Sie, dass der Godunov-Fluss mit dem Upwind-Fluss übereinstimmt.

Aufgabe 2 (4 Punkte)

Betrachten Sie die eindimensionalen Flachwassergleichungen

$$\begin{aligned} \partial_t h + \nabla\cdot(h\,v) &= 0, \\ \partial_t(h\,v) + \nabla\cdot\big(h\,v^2 + \frac{1}{2}\,g\,v^2\big) &= 0, \end{aligned}$$

wobei $h > 0$ die Wasserhöhe, $v \in \mathbb{R}$ die Geschwindigkeit und $g > 0$ die Gravitationskonstante ist. Mit $u = (h, h\,v)$ können wir dieses System in der Form

$$\partial_t u + \nabla\cdot f(u) = 0$$

schreiben.

Seien u_l und u_r zwei gegebene Zustñade. Wir definieren den Roe-Zustand $\bar{u} = (\bar{h}, \bar{h}\,\bar{v})$ durch

$$\bar{h} = \frac{h_l + h_r}{2}, \quad \bar{v} = \frac{\sqrt{h_l}v_l + \sqrt{h_r}v_r}{\sqrt{h_l} + \sqrt{h_r}}.$$

Zeigen Sie, dass durch $Df(\bar{u})$ eine Roe-Linearisierung gegeben ist, d.h.

$$Df(\bar{u})\,(u_r - u_l) = f(u_r) - f(u_l).$$

Aufgabe 3 (4 Punkte)

Betrachten Sie die skalare Burgersgleichung

$$\partial_t u + \partial_x f(u) = 0$$

mit $f(u) = \frac{1}{2}\,u^2$.

(a) Berechnen Sie zu $u_l, u_r \in \mathbb{R}$ einen Roe-Zustand.

(b) Zeigen Sie, dass das Roe-Verfahren i.A. nicht die Entropielösung approximiert, indem Sie ein Gegenbeispiel für die Burgersgleichung angeben.

Aufgabe 4 (4 Punkte)

Zeigen Sie die Existenz eines Roe-Zustandes für das p-system

$$\left.\begin{aligned} \partial_t v - \partial_x u &= 0, \\ \partial_t u + \partial_x p &= 0 \end{aligned}\right\} \text{ in } \mathbb{R}\times]0,\infty[.$$

mit der Zustandsgleichung $p' < 0$. Geben Sie für den Fall $p(v) = \frac{k}{v^\gamma}$ mit $k > 0$ und $\gamma = 1$ explizit einen Roe-Zustand an.