Abteilung für
Angewandte Mathematik

Prof. Dr. D. Kröner
Dr. J. Daube

18.04.2018

Übung zur Vorlesung

Mathematische Modellierung

SS 2018 — Blatt 1

Aufgabe 1 (4 Punkte)

Bestimmen Sie für $a, \alpha \in \mathbb{R}$ eine Lösung $u \in C^2((0,\infty)) \cap C^0([0,\infty))$ des Anfangswertproblems

$$\begin{aligned} u'' &= a(1-\alpha u') \quad \text{in} \quad (0,\infty), \\ u(0) &= 0, \\ u'(0) &= 0. \end{aligned}$$

Ist die Lösung eindeutig bestimmt?

Aufgabe 2 (4 Punkte)

Skizzieren Sie jeweils eine Lösung der Differentialgleichung $u' = u(1-u)$ zu den folgenden Anfangsbedingungen:

(a) $u(0) < 0$,

(b) $0 < u(0) < 1$,

(c) $u(0) > 1$.

Aufgabe 3 (Lemma von Gronwall) (4 Punkte)

Seien $I = [a,b]$ ein Intervall und $u, \alpha \colon I \to \mathbb{R}$ und $\beta \colon I \to [0,\infty)$ stetige Funktionen, die der Integralungleichung

$$u(t) \leq \alpha(t) + \int_a^t \beta(s) u(s)\,\mathrm{d}s,$$

für alle $t \in I$, genügen. Zeigen Sie, dass dann für alle $t \in I$ gilt:

$$u(t) \leq \alpha(t) + \int_a^t \alpha(s)\beta(s) \exp\left(\int_s^t \beta(\sigma)\,\mathrm{d}\sigma\right)\mathrm{d}s.$$

Aufgabe 4 (Wärmeleitungsgleichung) (4 Punkte)

Sei $g \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ein beschränkte, stetige Funktion. Zeigen Sie die folgenden Eigenschaften der Funktion

$$u(x,t) = (4\pi t)^{-\frac{1}{2}} \int_{\mathbb{R}} \exp\left(-\tfrac{|x-y|^2}{4t}\right) g(y)\,\mathrm{d}y, \quad (x,t) \in \mathbb{R} \times (0,\infty).$$

(a) $u \in C^\infty(\mathbb{R} \times (0,\infty))$.

(b) $\partial_t u - \partial_x^2 u = 0$ in $\mathbb{R} \times (0,\infty)$.

(c) Für alle $x_0 \in \mathbb{R}$ gilt

$$\lim_{\substack{(x,t)\to(x_0,0) \\ (x,t)\in\mathbb{R}\times(0,\infty)}} u(x,t) = g(x_0).$$

Abgabe: 02.05.2018, 12 Uhr (Briefkästen, Hermann-Herder-Str. 10, neben Raum 201).