Abteilung für
Angewandte Mathematik

Prof. Dr. D. Kröner
Dr. J. Daube

02.05.2018

Übung zur Vorlesung

Mathematische Modellierung

SS 2018 — Blatt 2

Aufgabe 1 (Steilster An-/Abstieg) (4 Punkte)

(a) Sei $f \in C^1(\mathbb{R}^n)$. Für $x_0 \in \mathbb{R}^n$ gelte $\nabla f(x_0) \neq 0$. Für welche

$$v \in S^{n-1} := \{x \in \mathbb{R}^n : |x| = 1\}$$

ist die Richtungsableitung $v \cdot \nabla f$ maximal (bzw. minimal)?

(b) In einer Diskothek ist die Lautstärke am Ort $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ durch die Funktion

$$f(x_1, x_2) = (x_1 - 3)^2 + (x_2 + 4)^2$$

gegeben. Eine Besuchergruppe ist es an diesem Ort zu laut. In welcher Richtung empfehlen Sie ihr, den Ort zu verlassen?

Aufgabe 2 (Zusammenhang Divergenz und Laplace-Operator) (4 Punkte)
Sei $f \in C^2(\mathbb{R}^n)$. Zeigen Sie, dass $\operatorname{div}(\nabla f) = \Delta f$.

Aufgabe 3 (Klassische Lösungen sind schwache Lösungen) (4 Punkte)
Zeigen Sie, dass jede klassische Lösung $u\colon \mathbb{R} \times [0, T) \to \mathbb{R}$ des Anfangswertproblems

$$\begin{aligned} \partial_t u + \partial_x q(u) &= 0 \quad \text{in} \quad \mathbb{R} \times (0, T), \\ u(\cdot, 0) &= u_0 \quad \text{auf} \quad \mathbb{R} \end{aligned}$$

eine schwache Lösung ist.

Aufgabe 4 (Erhaltungseigenschaft) (4 Punkte)
Wie in Kapitel 2 der Vorlesung sei $u\colon (a, b) \times (0, T) \to \mathbb{R}$ eine (hinreichend glatte) Lösung der Erhaltungsgleichung

$$\partial_t u + \partial_x q(u) = 0 \quad \text{in} \quad (a, b) \times (0, T).$$

Berechnen Sie, für $t \in (0, T)$,

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \int_a^b u(x, t) \, \mathrm{d}x.$$

Warum ist das Ergebnis nach der Modellierung aus Kapitel 2 der Vorlesung nicht überraschend?

Abgabe: 16.05.2018, 12 Uhr (Briefkästen, Hermann-Herder-Str. 10, neben Raum 201).