Abteilung für
Angewandte Mathematik

Prof. Dr. D. Kröner
Dr. J. Daube

16.05.2018

Übung zur Vorlesung

Mathematische Modellierung

SS 2018 — Blatt 3

Aufgabe 1 (Charakteristiken der Burgers-Gleichung) (4 Punkte)
Betrachten Sie für $f(u) = \frac{1}{2}u^2$ die Burgers-Gleichung

$$\partial_t u + \partial_x f(u) = 0 \quad \text{in} \quad \mathbb{R} \times (0, \infty) \tag{1}$$

zu vorgeschriebenen Anfangsdaten

$$u_0(x) = \begin{cases} 0, & \text{für } x < 0, \\ 1, & \text{für } x > 0. \end{cases} \tag{2}$$

Skizzieren Sie die zugehörigen Charakteristiken, die in den Punkten $(-2, 0)$ bzw. $(2, 0)$ starten. Welche Werte hat die Lösung u des Anfangswertproblems (1)–(2) entlang dieser Charakteristiken?

Aufgabe 2 (Schwache Lösungen der Burgers-Gleichung) (4 Punkte)
Zeigen Sie, dass

$$u(x, t) = \begin{cases} 0, & \text{für } x < \frac{t}{2}, \\ 1, & \text{für } x > \frac{t}{2} \end{cases}$$

eine schwache Lösung des Anfangswertproblems (1)–(2) ist. Zeigen oder widerlegen Sie, dass schwache Lösungen des Anfangswertproblems (1)–(2) eindeutig bestimmt sind.

Aufgabe 3 (Randdaten für Transportgleichungen) (4 Punkte)
Seien $a, b \in \mathbb{R}$ so, dass $a < b$. Betrachten Sie für $\gamma < 0$ das Anfangsrandwertproblem

$$\begin{aligned} \partial_t u + \gamma \partial_x u &= 0 \quad \text{in} \quad (a, b) \times (0, \infty), \\ u(\cdot, 0) &= 1 \quad \text{in} \quad (a, b), \\ u(a, \cdot) &= u_l \quad \text{in} \quad (0, \infty), \end{aligned}$$

dabei sind $u_l\colon (0, \infty) \to \mathbb{R}$ vorgeschriebene Randdaten auf dem linken Rand $\{a\} \times (0, \infty)$. Zeigen Sie, dass für $u_l \equiv 1$ eine schwache Lösung existiert. Diskutieren Sie den Fall $u_l \equiv 2$.

Aufgabe 4 (Erste Variation) (4 Punkte)
Seien $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ so, dass $x_1 < x_2$. Betrachten Sie für eine hinreichend glatte Funktion $F\colon \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ das Funktional $T\colon C^1(x_1, x_2) \to \mathbb{R}$, gegeben durch

$$u \mapsto T(u) = \int_{x_1}^{x_2} F(u(x), u'(x))\, \mathrm{d}x.$$

Für $\varepsilon \in \mathbb{R}$ und $\Phi \in C_0^\infty(x_1, x_2)$ sei $J\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ durch

$$\varepsilon \mapsto J(\varepsilon) = T(u + \varepsilon\Phi)$$

gegeben. Berechnen Sie die erste Variation von T, d.h.

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\varepsilon} J(\varepsilon)\Big|_{\varepsilon=0}.$$

Abgabe: 06.06.2018, 12 Uhr (Briefkästen, Hermann-Herder-Str. 10, neben Raum 201).