Abteilung für
Angewandte Mathematik

Prof. Dr. D. Kröner
Dr. J. Daube

06.06.2018

Übung zur Vorlesung

Mathematische Modellierung

SS 2018 — Blatt 4

Aufgabe 1 (Optimale Steuerungen) (8 Punkte)

Sei $A \subset \mathbb{R}^m$. Betrachten Sie für $M \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $N \in \mathbb{R}^{n\times m}$ und eine Steuerungsfunktion

$$\alpha \in \mathcal{A} = \{\alpha\colon [0,\infty) \to A \,:\, \alpha \text{ ist messbar}\}$$

das folgende Anfangswertproblem gewöhnlicher Differentialgleichungen

$$\begin{aligned} x'(t) &= Mx(t) + N\alpha(t), \quad (t > 0), \\ x(0) &= x_0 \end{aligned} \tag{1}$$

zu vorgeschriebenen Anfangsdaten $x_0 \in \mathbb{R}^n$.

(a) Zeigen Sie, dass das System (1) für jede zulässige Steuerungsfunktion $\alpha \in \mathcal{A}$ eine eindeutig bestimmte Lösung x_α besitzt. Bestimmen Sie diese!

(b) Seien $X(t) = \exp(tM)$ und

$$K(t, x_0) = \{x_1 \in \mathbb{R}^n \,:\, \exists \alpha \in \mathcal{A} : x_\alpha(t) = x_1\}.$$

Zeigen Sie, dass $x_1 \in K(t, x_0)$ genau dann, wenn

$$x_1 = X(t)x_0 + X(t)\int_0^t X^{-1}(s)N\alpha(s)\,\mathrm{d}s.$$

(c) Zeigen Sie, dass die Menge $K(t, x_0)$ konvex ist.

(d) Zeigen Sie, dass die Menge $K(t, x_0)$ abgeschlossen ist. Benutzen Sie dazu (ohne Beweis) den Satz von Alaoglu. (Der Satz von Alaoglu (bzw. der Satz von Banach-Alaoglu-Bourbaki) ist ein wichtiges Kompaktheitsresultat. Sie finden diesen beispielsweise in Brézis, Analyse fonctionelle, Th. III.15, aber auch in allen anderen Lehrbüchern zur linearen Funktionalanalysis. Er wird in dieser Aufgabe benötigt, um ein Kompaktheitskriterium für Folgen in dem Raum L^∞ zur Hand zu haben, vgl. auch Brézis, Analyse fonctionelle, Ch. IV.3 C.)

Aufgabe 2 (Euler-Lagrange-Gleichung) (4 Punkte)

Seien $F\colon \mathbb{R}\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine hinreichend glatte Funktion und $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ mit $x_1 < x_2$. Leiten Sie die zu dem Funktional

$$u \mapsto T(u) = \int_{x_1}^{x_2} F(u(x), u'(x))\,\mathrm{d}x \tag{2}$$

gehörige Euler-Lagrange-Gleichung her. Gehen Sie dazu wie folgt vor: Betrachten Sie einen Minimierer $u \in C^1(x_1, x_2)$ von T. Überlegen Sie sich, dass für diesen die erste Variation von T (siehe Blatt 3, Aufgabe 4) verschwindet. Leiten Sie mit Hilfe des Fundamentallemmas der Variationsrechnung eine Differentialgleichung, die sogenannte Euler-Lagrange-Gleichung, her.

Aufgabe 3 (4 Punkte)

Seien $H, g > 0$. Betrachten Sie das Funktional (2) für den Spezialfall

$$F(u,p) = \sqrt{\frac{1+p^2}{2g(H-u)}}.$$

Seien $u \in C^2(x_1, x_2)$ ein Minimierer von T und $\tau \in C^1(x_1, x_2)$, so dass

$$H - u = r(1-\cos(\tau)) = 2r\sin^2(\tfrac{\tau}{2}) \quad \text{in} \quad (x_1, x_2).$$

für eine geeignete Konstante $r > 0$. Zeigen Sie, dass

$$r\tau'(1-\cos(\tau)) = 1 \quad \text{in} \quad (x_1, x_2).$$

Abgabe: 20.06.2018, 12 Uhr (Briefkästen, Hermann-Herder-Str. 10, neben Raum 201).