Abteilung für
Angewandte Mathematik

Prof. Dr. D. Kröner
Dr. J. Daube

20.06.2018

Übung zur Vorlesung

Mathematische Modellierung

SS 2018 — Blatt 5

Aufgabe 1 (4 Punkte)

Seien $\beta, \sigma, \rho, g > 0$ Konstanten und $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ ein beschränktes Gebiet mit glattem Rand $\partial\Omega$. Leiten Sie die Euler-Lagrange-Gleichung des Funktionals

$$u \mapsto E(u) = \sigma \int_\Omega \sqrt{1 + \|\nabla u\|^2}\, \mathrm{d}x + \frac{1}{2}\rho g \int_\Omega u^2\, \mathrm{d}x - \sigma\beta \int_{\partial\Omega} u\, \mathrm{d}o(x)$$

her!

Aufgabe 2 (4 Punkte)

(a) Seien $u, v \in \mathbb{R}^3$ und $\alpha \in [0, \pi]$ der von u und v eingeschlossene Winkel. Zeigen Sie, dass

$$\langle u, v \rangle = \|u\|\, \|v\| \cos(\alpha).$$

(b) Für $v \in C^1(\mathbb{R})$ sei $\Psi = \Psi(x)$, $x \in \mathbb{R}$, der Winkel, den die Tangente an den Graph von v im Punkt $(x, v(x)) \in \mathbb{R}^2$ mit der x-Achse einschließt. Zeigen Sie, dass

$$v'(x) = \sqrt{1 + v'(x)}\, \sin(\Psi(x)).$$

Aufgabe 3 (4 Punkte)

Sei $B_1(0) \subset \mathbb{R}^2$ die zweidimensionale Einheitskugel. Betrachten Sie für vorgeschriebene Randdaten $\beta\colon \partial B_1(0) \to \mathbb{R}$ das Randwertproblem

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(Tu) &= Bu \quad \text{in} \quad B_1(0), \\ \nu \cdot Tu &= \beta \quad \text{auf} \quad \partial B_1(0), \end{aligned}$$

wobei $Tu = (1 + \|\nabla u\|^2)^{-1/2} \nabla u$, $B > 0$ und $\nu = (1, 0)$. Leiten Sie das Randwertproblem für rotationssymmetrische Lösungen der Form $u(x) = v(\|x\|)$ her!

Aufgabe 4 (4 Punkte)

Seien $x, y \in (-1, 1)$ so, dass

$$\frac{x}{\sqrt{1+x^2}} < \frac{y}{\sqrt{1+y^2}}.$$

Zeigen Sie, dass $x < y$.

Abgabe: 04.07.2018, 12 Uhr (Briefkästen, Hermann-Herder-Str. 10, neben Raum 201).