

Praktische Übung zur Vorlesung
Numerik für Differentialgleichungen
SS 2018 — Blatt 2

Abgabe: 18.05.2018, via Email an pranumdglss18@mathematik.uni-freiburg.de.

Aufgabe 1 (10 Punkte)

Wir betrachten das Anfangswertproblem

$$y'(t) = f(t, y(t)), \quad y(t_0) = y_0 \quad (1)$$

auf dem Intervall $I = [t_0, T]$.

- (a) Das Heunverfahren ist gegeben durch die Vorschrift

$$y_{n+1} = y_n + h \frac{f(t_n, y_n) + f(t_n + h, y_n + hf(t_n, y_n))}{2}$$

wobei h eine gegebene Schrittweite und $t_n = t_0 + nh$ ist. Implementieren Sie das Heunverfahren für Differentialgleichungen der Form (1) (skalar und Systeme). Geben Sie ausserdem das zugehörige Butcher-Tableau an.

- (b) Das implizite Eulerverfahren ist gegeben die Vorschrift

$$y_{n+1} = y_n + hf(t_{n+1}, y_{n+1}).$$

Implementieren Sie das implizite Eulerverfahren für Differentialgleichungen der Form (1) (skalar und Systeme). Benutzen Sie zum Lösen des Gleichungssystems die Fixpunktiteration

$$\begin{aligned} y_{n+1}^0 &= y_n \\ y_{n+1}^{k+1} &= y_n + hf(t_{n+1}, y_{n+1}^k) \end{aligned}$$

mit einem geeigneten Abbruchkriterium.

- (c) Wir betrachten die Federpendelgleichung (siehe Blatt 1, 1(b)) auf dem Intervall $[0, 40]$. Vergleichen Sie graphisch die Lösungen des impliziten Eulerverfahrens, des expliziten Eulerverfahrens, des Heunverfahrens und die exakte Lösung und berechnen Sie die Approximationsfehler $|y_N - y(t_N)|$ zum Zeitpunkt $t_N = 40$ für die Schrittweiten $h = 2^{-s}$, $s = 1, \dots, 5$.
Plotten Sie den Approximationsfehler der Verfahren gegen die Schrittweiten. Was können Sie zum Konvergenzverhalten der Verfahren sagen?