Abteilung für
Angewandte Mathematik

Prof. Dr. D. Kröner
M.Sc. J. Gerstenberger

14.06.2018

Praktische Übung zur Vorlesung

Numerik für Differentialgleichungen

SS 2018 — Blatt 4

Abgabe: 22.06.2018, via Email an pranumdglss18@mathematik.uni-freiburg.de.

Aufgabe 1 (10 Punkte)

Lineare m-Multischrittverfahren sind gegeben durch die Verfahrensvorschrift

$$\sum_{j=0}^{m} a_j y_{n+j} = h \sum_{j=0}^{m} b_j f(t_{n+j}, y_{n+j}),$$

wobei die Koeffizienten $a_0, \dots, a_m$ und $b_0, \dots, b_m$ die Methode bestimmen. Die Verfahren sind explizit für $b_m = 0$ und implizit für $b_m \neq 0$.

(a) Die Adams-Bashforth-Verfahren sind gegeben durch die Wahl $a_m = 1$, a_{m-1}, $a_{m-2} = \cdots = a_0 = 0$ und $b_m = 0$.
Implementieren sie die Adams-Bashforth-Verfahren für $m = 2, 3, 4$. Die Koeffizienten b_j sind für

$$\begin{aligned}
m = 2: &\qquad b_1 = \tfrac{3}{2},\ b_0 = -\tfrac{1}{2},\\
m = 3: &\qquad b_2 = \tfrac{23}{12},\ b_1 = -\tfrac{3}{4},\ b_0 = \tfrac{5}{12},\\
m = 4: &\qquad b_3 = \tfrac{55}{24},\ b_2 = -\tfrac{59}{24},\ b_1 = \tfrac{37}{24},\ b_0 = -\tfrac{3}{8}.
\end{aligned}$$

(b) Die *BDF*-Verfahren (Backwards Differentiation Formulas) sind für $m \geq 1$ gegeben durch

$$\begin{aligned}
&b_m = 1, \qquad b_{m-1} = \cdots = b_0 = 0,\\
&a_m = \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{k},\\
&a_j = (-1)^{m-j} \sum_{k=m-j}^{m} \frac{1}{k} \binom{k}{m-j}, \quad j = m-1, \dots, 0.
\end{aligned}$$

Implementieren Sie die BDF-Verfahren für $m = 1, 2, \dots, 7$. Benutzen Sie zur Lösung der impliziten Gleichung die Fixpunktiteration von Blatt 2.

(c) Testen Sie ihre Verfahren anhand des Anfangwertproblems

$$y'(t) = -2y(t) + 5\cos(t), \quad y(0) = 2.$$

Die exakte Lösung is gegeben durch $y(t) = 2\cos(t) + \sin(t)$.
Berechnen Sie für alle Verfahren die Approximationsfehler $e_h = |y_N - y(t_N)|$ zum Zeitpunkt $T = 1$ für geeignete Schrittweiten h und bestimmen Sie die experimentelle Konvergenzordnung (EOC) γ mit dem Ansatz $e_h \approx ch^\gamma$, so dass für zei verschiedene Schrittweiten

$$\gamma \approx \frac{\log(e_h/e_{h'})}{\log(h/h')}$$

folgt. Plotten Sie die Fehler e_h der Verfahren gegen die Schritteweite h in einem log-log-Plot und vergleichen sie diese mit dem Ansatz für die Konvergenzordnung.