Abteilung für
Angewandte Mathematik

Prof. Dr. D. Kröner
Dr. A. Korsch

30.04.2018

Übung zur Vorlesung

Numerik für Differentialgleichungen

SS 2018 — Blatt 2

Aufgabe 1 (3 Punkte)

Lösen sie das folgende nichtlineare Anfangswertproblem:

$$u'(t) = e^{u(t)} \sin(t) \qquad \text{mit } u(0) = 0$$

und geben sie das Intervall an, auf dem die Lösung existiert.

Aufgabe 2 (3 Punkte)

Sei $u_0 > 0$. Zeigen Sie, dass die Lösung des Anfangswertproblems

$$\begin{cases} u'(t) = \big(u(t)\big)^2 \text{ für } t > 0, \\ u(0) = u_0 \end{cases}$$

für $t \to \frac{1}{u_0}$ unbeschränkt ist.

Aufgabe 3 (4 Punkte)

Für $\lambda \in \mathbb{R}$ setze

$$u_\lambda(t) \;:=\; \exp(\lambda t^2) \text{ für } t \in \mathbb{R} \text{ und } v_\lambda(x) \;:=\; \lambda\, |x|^4 \;\text{ für } x \in \mathbb{R}^2.$$

(a) Bestimmen Sie λ so, dass u_λ eine Lösung der Differentialgleichung

$$u''(t) \;=\; tu'(t) + u(t) \text{ für alle } t \in \mathbb{R}$$

ist.

(b) Bestimmen Sie λ so, dass v_λ eine Lösung der Differentialgleichung

$$\Delta v(x) \;=\; |x|^2 \;\text{ für alle } x \in \mathbb{R}^2$$

ist.

Aufgabe 4 (4 Punkte)

(a) Lösen Sie das Anfangswertproblem

$$\begin{cases} u' = -\dfrac{1}{u}\sqrt{1-u^2}, \\ u(0) = 1 \end{cases} \tag{$**$}$$

mittels Separation der Variablen.

(b) Besitzt das Anfangswertproblem $(**)$ noch weitere Lösungen?

(c) Ermitteln Sie für eine gegebene (konstante) Schrittweite $\tau > 0$ mit Hilfe des Euler-Verfahrens eine diskrete Lösung u_n $(n = 0, 1, 2, \dots)$.

Aufgabe 5 (2 Punkte)

Zeigen Sie, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ die Abschätzung

$$\left(1+\frac{t}{n}\right)^n \leq \exp(t) \text{ für alle } t > 0$$

gilt.

Abgabe: Montag, den 14.05.2018, vor der Vorlesung.