Prof. Dr. D. Kröner
Dr. A. Korsch

04.06.2018

Übung zur Vorlesung

Numerik für Differentialgleichungen

SS 2018 — Blatt 4

Aufgabe 1 (Methode der Variation der Konstanten) (4 Punkte)

Sei I ein offenes Intervall und seien $g, h : I \to \mathbb{R}$ stetige Funktionen.

(a) Zeigen Sie, dass die Differentialgleichung

$$Lu(t) := u'(t) + g(t)u(t) = h(t) \text{ für } t \in I$$

dem Superpositionsprinzip genügt: Für $i = 1, 2, \ldots, n$ seien $h_i : I \to \mathbb{R}$ stetige Funktionen und $u_i \in C^1(I)$ Lösungen von

$$Lu_i = h_i \text{ in } I.$$

Dann ist $\overline{u} := \sum_{i=1}^n u_i$ eine Lösung von $L\overline{u} = \overline{h}$ in I, wobei $\overline{h} := \sum_{i=1}^n h_i$.

(b) Seien $s_0 \in \mathbb{R}$ und $t_0 \in I$. Setze

$$G(t) := \int_{t_0}^{t} g(r)\,\mathrm{d}r \text{ für } t \in I.$$

Bestimmen Sie $C \in C^1(I)$ so, dass

$$u(t) := C(t)\exp(-G(t)) \text{ für } t \in I$$

eine Lösung des Anfangswertproblems

$$\begin{cases} Lu = h \text{ in } I, \\ u(t_0) = s_0 \end{cases} \tag{$*$}$$

ist.

(c) Zeigen Sie, dass das Anfangswertproblem $(*)$ genau eine Lösung $u \in C^1(I)$ besitzt.

Aufgabe 2 (4 Punkte)

Wir wollen das Anfangswertproblem

$$u'(t) = f(t, u(t)) \quad \text{für } t \in]0, 1[,$$
$$u(0) = 2$$

mit $f(t, s) = 2s$ numerisch lösen. Wir verwenden dazu die Gitterweite $h = \frac{1}{4}$. Berechne die numerische Lösung mit Hilfe

(a) des explizites Euler-Verfahrens,

(b) des Zweischrittverfahrens

$$u_{i+1}^{(h)} = u_{i-1}^{(h)} + h \sum_{m=0}^{1} \beta_{1,m} f(t_{i-m}^{(h)}, u_{i-m}^{(h)}),$$

wobei die $\beta_{q,m}$ wie in der Vorlesung definiert sind. Dabei setzen wir $u_{-1} = u_0$.

Berechne jeweils den Fehler zum Zeitpunkt $t = 1$.

Aufgabe 3 (4 Punkte)

Wir betrachten das Anfangswertproblem

$$u' = -\alpha u \qquad \text{in } (t_0, \infty) \qquad \text{und } u(t_0) = 1$$

für $\alpha > 0$.

(a) Sei $\alpha = 1$. Geben Sie eine Schrittweite h an, so dass die $j-$te Iterierte des expliziten Eulerverfahrens u_j^h sich für $j \to \infty$ wie $u(t)$ mit $t \to \infty$ verhält und eine Schrittweite, auf die das nicht zutrifft.

(b) Berechnen Sie nun für $\alpha = 1$ die ersten vier Iterationsschritte des imliziten Eulerverfahrens mit Schrittweite $h = 2$.

(c) Leiten Sie eine Bedingung für h in Abhängigkeit von α her, so dass das explizite Eulerverfahren mit $j \to \infty$ konvergiert. Interpretieren Sie diese Bedingung in Hinblick auf große Werte von α.

Aufgabe 4 (4 Punkte)

Sei D offen, $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion. Zeigen Sie, dass der Gradient von f an einer Stelle $x \in D$ in die Richtung des steilsten Anstiegs von f an der Stelle x zeigt.

Abgabe: Montag, den 18.06.2018, vor der Vorlesung.