Abteilung für
Angewandte Mathematik

Prof. Dr. D. Kröner
Dr. A. Korsch

18.06.2018

Übung zur Vorlesung

Numerik für Differentialgleichungen

SS 2018 — Blatt 5

Aufgabe 1 (4 Punkte)

Wir betrachten das lineare Randwertproblem in $u : [a,b] \to \mathbb{R}^d$

$$u'(t) = A(t)u(t) + f(t), \qquad t \in [a,b], \quad B_a u(a) + B_b u(b) = g.$$

Sei $y_0 : [a,b] \to \mathbb{R}^d$ Lösung von

$$y_0' = Ay_0 + f \qquad \text{auf } [a,b], \quad y_0(a) = 0$$

und $y : [a,b] \to \mathbb{R}^{d\times d}$ Lösung von

$$y' = Ay \qquad \text{auf } [a,b], \quad y(a) = I.$$

Außerdem sei $s \in \mathbb{R}^d$ Lösung des linearen Gleichungssystems

$$Qs := (B_a + B_b y(b))s = g - B_b y_0(b).$$

Zeigen Sie, dass dann gilt

$$u(t) := y_0(t) + y(t)s.$$

Aufgabe 2 (4 Punkte)

Sei

$$\begin{aligned}
&V_0 = \{u \in H^{1,2}(I) | \;\; u(a) = 0, u(b) = 0\},\\
&a : V_0 \times V_0 \to \mathbb{R}, \quad a(u,\varphi) = \int_I (pu'\varphi' + qu\varphi),\\
&b : V_0 \to \mathbb{R}, \quad b(\varphi) := \int_I f\varphi.
\end{aligned}$$

Wir nehmen an, dass für $p, q \in L^\infty(I)$ gilt: $p \geq c > 0, \quad q \geq 0$ auf $I = [a,b]$. Zeigen Sie, dass dann V_0, a und b die Voraussetzungen von Satz 4.7 erfüllen.

Aufgabe 3 (4 Punkte)

Betrachten Sie das Randwertproblem

$$\begin{aligned}
Lu := -u'' = f \qquad &\text{auf } (a,b)\\
\alpha u(a) = g_1, \quad &\beta u(b) = g_2.
\end{aligned}$$

Diskretisieren Sie das Randwertproblem mit einem Differenzenverfahren 1. Ordnung und stellen Sie das zugehörige lineare Gleichungssystem auf.

Aufgabe 4 (4 Punkte)

Sei $h > 0$. Wir betrachten den Differenzenoperator aus Kapitel 6

$$L_h u(x) = \sum_{k=-q}^{q} \alpha_k^{(h)}(x) u(x + hz_k), \qquad \text{mit } z_k \neq z_l, \text{ für } l \neq k,$$

$$\text{mit} \quad \alpha_k(x) := \sum_{j=0}^{n} \alpha_{kj}(x) h^{-j}.$$

Nun definieren wir

$$L_{jh} u(x) := \frac{1}{h^j} \sum_{k=-q}^{q} \alpha_{kj}(x) u(x + hz_k).$$

Zeigen Sie, dass

$$L_h u(x) = \sum_{j=0}^{n} L_{jh} u(x)$$

gilt.

Abgabe: Montag, den 02.07.2018, vor der Vorlesung.