Abteilung für
Angewandte Mathematik

Prof. Dr. D. Kröner
Dr. A. Korsch

02.07.2018

Übung zur Vorlesung

Numerik für Differentialgleichungen

SS 2018 — Blatt 6

Aufgabe 1 (4 Punkte)

Es seien die Stützstellen x_1, x_2, x_3 gegeben und u sei aus $C^2(\mathbb{R})$. Berechnen Sie die Koeffizienten $\alpha_j \in \mathbb{R}$ mit $j \in \{1, 2, 3\}$, so dass

$$\sum_{j=1}^{3} \alpha_j u(x_j) = u'(x_2) + o(h)$$

mit $h = \max\{|x_1 - x_2|, |x_2 - x_3|\}$.

Aufgabe 2 (4 Punkte)

Es seien die Stützstellen $x_i = a + (i-1)h$ für $a \in \mathbb{R}, i \in \mathbb{Z}, h > 0$ gegeben. Berechnen Sie Koeffizienten $\alpha_i \in \mathbb{R}$ und ein möglichst großes $\alpha \in \mathbb{N}$, so dass für hinreichend glatte Funktionen u gilt:

$$\sum_{k=i-2}^{i+2} \alpha_k u(x_k) = u^{(4)}(x_i) + o(h^\alpha),$$

wobei $u^{(4)}$ die vierte Ableitung von u ist.

Aufgabe 3 (4 Punkte)

Es sei $p \in C^2(\mathbb{R})$, $u \in C^3(\mathbb{R})$ und $x_i, i \in \mathbb{Z}$ seien Stützstellen, mit maximalem Abstand $h > 0$. Zeigen Sie, dass gilt:

$$\frac{1}{h^2}[p(x_{i+1})(u(x_i) - u(x_{i+1})) + p(x_i)(u(x_i) - u(x_{i-1}))] = -(pu')'(x_i) + o(h).$$

Aufgabe 4 (4 Punkte)

Wir betrachten den Differenzenoperator

$$L^h u_i := -\frac{1}{h^2}(u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}), \quad i = 1, ..., N-1$$

Es gelte

$$L^h u_i \leq 0 \quad \forall i = 1, ..., N-1 \text{ und es sei } u_0 \leq 0, \text{ und } u_N \leq 0.$$

Zeigen Sie, dass dann gilt

$$u_i \leq 0 \quad \forall i = 0, ..., N.$$

Abgabe: Montag, den 16.07.2018, vor der Vorlesung.