**Abteilung für
Angewandte Mathematik**

Prof. Dr. D. Kröner
M.Sc. S. Wolff-Vorbeck

3. Juni 2019

Praktische Übung zur Vorlesung

Mathematische Modellierung

SS 2019 — Blatt 2

Abgabe: bis 17.06.2019, via Email an den Tutor.

Aufgabe 1 (Verkehrssimulation II) (5 Punkte)

(a) Gegeben sei das Anfangswertproblem aus der Vorlesung

$$\begin{aligned} \partial_t u(t,x) + \partial_x q(u) &= 0 \quad \text{auf} \quad I \times [0,T], \\ u(\cdot,0) &= u_0 \quad \text{auf } I, \\ u(a,\cdot) &= u_1 \quad \text{auf } [0,T], \end{aligned}$$

mit $q(u) = u(u_{max} - u)$. Nutzen Sie einen Vorwärtsdifferenzenquotienten in der Zeit und einen Rückwärtsdifferenzenquotienten im Ort um das Problem numerisch zu lösen. Das bedeutet Sie lösen in jedem Zeitschritt das Gleichungssystem

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} = -\frac{q(u_i^n) - q(u_{i-1}^n)}{\Delta x}.$$

Testen Sie ihr Programm mit $u_{max} = 1$, $u_1 = \frac{u_{max}}{2}$, $I = [0,1]$ sowie $T = 1$. Der Anfangswert u_0 sei gegeben durch eine Funktion, welche auf dem Intervall $[0, 0.2]$ konstant den Wert $\frac{u_{max}}{2}$ und auf dem Intervall $[0.9, 1]$ konstant den Wert $\frac{9}{10}u_{max}$ besitzt und glatt im Intervall $(0.2, 0.9)$ ist.

(b) Visuallisieren Sie ihre Ergebnisse und begründen Sie warum es in diesem Fall sinnvoll ist mit der schwachen Formullierung zu arbeiten.

Aufgabe 2 (Räuber-Beute-Modell) (5 Punkte)

Das (skalierte) verallgemeinerte Räuber-Beute-Modell ist gegeben durch die Differentialgleichung

$$\begin{aligned} \dot{B} &= (1 - \epsilon B)B - \frac{R}{1 + \kappa B}B, \\ \dot{R} &= \delta \frac{B}{1 + \kappa B}R - \delta R, \end{aligned}$$

mit Parametern $\delta, \epsilon, \kappa \geq 0$.

(a) Berechnen Sie per Hand die drei stationären Zustände des obigen Systems und beschreiben Sie diese.

(b) Lösen Sie das Räuber-Beute-Modell mit $\delta = 1$, $\kappa = 0.5$, $B_0 = 6$ und $R_0 = 1$ auf dem Intervall $[0, 100]$ für $\epsilon = 0.15$, $\epsilon = 0.3$ und $\epsilon = 0.6$. Implementieren Sie dazu einen Runge-Kutta-Löser 4.ter Ordnung.

(c) Stellen Sie ihre Ergebnisse in einem Phasendiagramm (B-R-Plot) dar. Was können Sie zum Verhalten der Lösungen für die verschiedenen ϵ sagen.