Abteilung für
Angewandte Mathematik

Prof. Dr. D. Kröner
M.Sc. S. Wolff-Vorbeck

21. Juni 2019

Praktische Übung zur Vorlesung

Mathematische Modellierung

SS 2019 — Blatt 2

Abgabe: bis 01.07.2019, via Email an den Tutor.

Aufgabe 1 (Lineare Optimierung) (4 Punkte)
Eine Firma stellt m verschiedene Produkte her, für deren Fertigung n Maschinen benötigt werden. Die j-te Maschine hat eine maximale monatliche Laufzeit von l_j Stunden. Das k-te Produkt generiert pro Mengeneinheit einen Ertrag von e_k Euro und belegt die j-te Maschine mit t_{jk} Stunden pro Mengeneinheit. Der monatliche Gesamtertrag soll ohne Überschreitung der Maximallaufzeiten optimiert werden.

(a) Formulieren Sie den beschriebenen Sachverhalt als Maximierungsproblem mit Nebenbedingung in der Form

$$\max_{x\in\mathbb{R}^m} f(x) = c \cdot x, \quad \text{unter der Nebenbedingung} \quad Ax \leq b, x \geq 0 \tag{1}$$

wobei $x = (x_1, x_2, ..., x_m)$ die monatlichen Mengeneinheiten der verschiedenen Produkte seien und die Ungleichungen komponentenweise zu verstehen sind.

(b) Verwenden Sie die Matlab-Routine **linprog**, um das Problem für die Daten $m = 2$, $n = 3$,$e_1 = 200$, $e_2 = 600$ und $t_{11} = 1$, $t_{21} = 1$, $t_{31} = 0$, $t_{12} = 3$, $t_{22} = 1$, $t_{32} = 2$ sowie $l_1 = 150$,$l_2 = 180$, $l_3 = 140$ zu lösen. Wie hoch ist der optimale monatliche Ertrag?

Aufgabe 2 (Dreikörperproblem) (4 Punkte)
Wir betrachten die Bewegung eines Satelliten im Schwerefeld zweier grosser Himmelskörper (z.B. Erde und Mond). Wir treffen dabei die folgenden Annahmen:

- Die Bewegung aller drei Körper findet in einer Ebene statt; die beiden großen Körper rotieren in konstanter Entfernung und mit konstanter Winkelgeschwindigkeit um ihren gemeinsamen Schwerpunkt.
- Der Satellit hat somit keinen Einfluss auf die Bahnen von Erde und Mond

Bezüglich eines mitrotierenden Koordinatensystems (in welchem Erde und Mond ruhen) mit Ursprung im gemeinsamen Schwerpunkt wird die Satellitenbahn $(x, y) = (x(t), y(t))$ und der Masse des Mondes $\mu = 1/82.45$ sowie der Masse der Erde $\mu' = 1-\mu$ beschrieben durch ein System zweier Differentialgleichungen:

$$x''(t) = x(t) + 2y'(t) - \mu' \frac{x(t) + \mu}{((x(t) + \mu)^2 + y(t)^2)^{3/2}} - \mu \frac{x(t) - \mu'}{((x(t) - \mu')^2 + y(t)^2)^{3/2}} \tag{2}$$

$$y''(t) = y(t) - 2x'(t) - \mu' \frac{y(t)}{((x(t) + \mu)^2 + y(t)^2)^{3/2}} - \mu \frac{y(t)}{((x(t) - \mu')^2 + y(t)^2)^{3/2}} \tag{3}$$

Die Position der Erde sei der Koordinatenursprung $(0, 0)$, die Position des Mondes sei $(1, 0)$. Visuallisieren Sie die Bahn des Satelliten im Kraftfeld zwischen Erde und Mond in einem **2d**-Plot, indem Sie Gleichung (2) für die Anfangsdaten $(x(0), y(0)) = (1.2, 0)$ sowie $(x'(0), y'(0)) = (0, -1.05)$ lösen.