Abteilung für
Angewandte Mathematik

Prof. Dr. D. Kröner
M.Sc. J. Gerstenberger 02.05.2019

Übung zur Vorlesung

# Mathematische Modellierung

SS 2019 — Blatt 1

**Aufgabe 1** (4 Punkte)
Bestimmen Sie für $a, \alpha \in \mathbb{R}$ eine Lösung $u \in C^2((0,\infty)) \cap C^0([0,\infty))$ des Anfangswertproblems

$$\begin{aligned} u'' &= a(1-\alpha u') \qquad \text{in } (0,\infty), \\ u'(0) &= 0, \\ u(0) &= 0. \end{aligned}$$

Ist die Lösung eindeutig bestimmt?

**Aufgabe 2** (4 Punkte)
Sei $u$ eine Lösung der autonomen Differentialgleichung $u' = f(u)$. Zeigen Sie, dass dann auch $v(x) = u(x-c)$ mit $c \in \mathbb{R}$ eine Lösung ist.

**Aufgabe 3 (Lemma von Gronwall)** (4 Punkte)
Seien $I = [a,b]$ ein Intervall und $u, \alpha : I \mapsto \mathbb{R}$ und $\beta : I \mapsto [0,\infty)$ stetige Funktionen, die der Integralgleichung

$$u(t) \leq \alpha(t) + \int_a^t \beta(s) u(s) \, \mathrm{d}s,$$

für alle $t \in I$, genügen. Zeigen Sie, dass dann für alle $t \in I$ gilt:

$$u(t) \leq \alpha(t) + \int_a^t \alpha(s)\beta(s) \exp\left( \int_s^t \beta(\sigma) \, \mathrm{d}\sigma \right) \mathrm{d}s.$$

**Aufgabe 4 (Wärmeleitungsgleichung)** (4 Punkte)
Sei $g : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ eine beschränkte, stetige Funktion. Zeigen Sie die folgenden Eigenschaften der Funktion

$$u(x,t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-\frac{|x-y|^2}{4t}} g(y) \, \mathrm{d}y \qquad \text{in } \mathbb{R} \times (0,\infty).$$

(a) $u \in C^\infty(\mathbb{R} \times (0,\infty))$.

(b) $\partial_t u - \partial_x^2 u = 0$ in $\mathbb{R} \times (0,\infty)$.

(c) Für alle $x_0 \in \mathbb{R}$ gilt

$$\lim_{\substack{(x,t)\to(x_0,0) \\ (x,t)\in\mathbb{R}\times(0,\infty)}} u(x,t) = g(x_0).$$

**Abgabe:** Mittwoch, den 15.05.2019, vor der Vorlesung.