Abteilung für Angewandte Mathematik

Prof. Dr. D. Kröner
M.Sc. J. Gerstenberger

15.05.2019

Übung zur Vorlesung

Mathematische Modellierung

SS 2019 — Blatt 2

Aufgabe 1 (klassische/schwache Lösungen) (4 Punkte)
Zeigen Sie, dass jede klassische Lösung $u : \mathbb{R} \times [0,T) \mapsto \mathbb{R}$ des Anfangswertproblems

$$\begin{aligned} \partial_t u + \partial_x q(u) &= 0 \qquad \text{in } \mathbb{R} \times (0,T)\,, \\ u(\cdot, 0) &= u_0 \qquad \text{auf } \mathbb{R} \end{aligned}$$

auch eine schwache Lösung ist.

Aufgabe 2 (Erhaltungseigenschaft) (4 Punkte)
Sei $u : (a,b) \times (0,T) \mapsto \mathbb{R}$ eine (hinreichend glatte) Lösung der Erhaltungsgleichung

$$\partial_t u + \partial_x q(u) = 0 \quad \text{in } (a,b) \times (0,T)\,.$$

Berechnen Sie, für $t \in (0,T)$,

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \int_a^b u(x,t)\,\mathrm{d}x\,.$$

Vergleichen Sie das Ergebniss mit der zweiten Verkehrsmodellierung

Aufgabe 3 (Burgers-Gleichung I) (4 Punkte)
Betrachten Sie die Burgersgleichung mit gegebenen Anfangsdaten

$$\begin{aligned} \partial_t u + u \partial_x u &= 0 \quad \text{in } \mathbb{R} \times (0,\infty)\,, \\ u(x,0) &= \begin{cases} 0, & \text{für } x < 0\,, \\ 1, & \text{für } x > 1\,. \end{cases} \end{aligned} \tag{$*$}$$

Skizzieren Sie die zugehörigen Charaktersistiken, die in $(-2,0)$ bzw. $(2,0)$ starten. Welche Werte hat die Lösung u des Anfangswertproblems $(*)$ entlang dieser Charakteristiken.

Aufgabe 4 (Burgers-Gleichung II) (4 Punkte)
Zeigen Sie, dass

$$u(x,t) = \begin{cases} 0, & \text{für } x < \frac{t}{2}\,, \\ 1, & \text{für } x > \frac{t}{2} \end{cases}$$

eine schwache Lösung des Anfangswertproblems $(*)$ ist. Zeigen oder Widerlegen Sie, dass schwache Lösungen des Anfangswertproblems $(*)$ eindeutig bestimmt sind.

Abgabe: Mittwoch, den 29.05.2019, vor der Vorlesung.