Abteilung für Angewandte Mathematik

Prof. Dr. D. Kröner
M.Sc. J. Gerstenberger

29.05.2019

Übung zur Vorlesung

Mathematische Modellierung

SS 2019 — Blatt 3

Aufgabe 1 (klassische/schwache Lösungen) (4 Punkte)
Sei $u : \mathbb{R} \times [0, T) \to \mathbb{R}$ eine schwache Lösung des Anfangswertproblems

$$\begin{aligned} \partial_t u + \partial_x q(u) &= 0 \qquad \text{in } \mathbb{R} \times (0, T)\,, \\ u(\cdot, 0) &= u_0 \qquad \text{auf } \mathbb{R}\,. \end{aligned}$$

Zeigen Sie, dass u auch klassische Lösung ist, wenn $u \in C^1$ gilt.

Aufgabe 2 (Randdaten für die Transportgleichung) (4 Punkte)
Seine $a, b \in \mathbb{R}$ so, dass $a < b$. Betrachten Sie für $\gamma < 0$ das Anfangswertproblem

$$\begin{aligned} \partial_t u + \gamma \partial_x u &= 0 \qquad \text{in } (a, b) \times (0, \infty)\,, \\ u(\cdot, 0) &= 1 \qquad \text{auf } (a, b)\,, \\ u(a, \cdot) &= u_l \qquad \text{auf } (0, \infty)\,. \end{aligned}$$

Dabie sind $u_l : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ vorgenschriebene Randdaten auf dem linken Rand $\{a\} \times (0, \infty)$. Zeigen Sie, dass für $u_l \equiv 1$ eine schwache Lösung existiert. Diskutieren Sie den Fall $u_l \equiv 2$.

Aufgabe 3 (Erste Variation) (4 Punkte)
Seien $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ so, dass $x_1 < x_2$. Betrachten Sie für eine hinreichend glatte Funktion $F : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ das Funktional $T : C^1((x_1, x_2)) \to \mathbb{R}$, gegeben durch

$$u \mapsto T(u) := \int_{x_1}^{x_2} F(u(x), u'(x))\, \mathrm{d}x\,.$$

Für $\varepsilon \in \mathbb{R}$ und $\Phi \in C_0^\infty((x_1, x_2))$ sei $J : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ durch

$$\varepsilon \mapsto J(\varepsilon) := T(u + \varepsilon\Phi)$$

gegeben. Berechnen Sie die erste Variation von T, d.h.

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\varepsilon} J(\varepsilon)\Big|_{\varepsilon=0}\,.$$

Aufgabe 4 (Euler-Lagrange-Gleichung) (4 Punkte)
Seien x_1, x_2, F, T wie in Aufgabe 3. Leiten Sie die zu dem Funktional T zugehörige *Euler-Lagrange-Gleichung* her. Gehen Sie dabei wie folgt vor:
Betrachten Sie einen Minimierer $u \in C^1((x_1, x_2))$ von T. Überlegen Sie sich, dass für diesen die erste Variation von T verschwindet. Leiten Sie mit Hilfe des Fundamentallemmas der Variationsrechnung eine Differentialgleichung, die sogenannte *Euler-Lagrange-Gleichung*, her.

Abgabe: Mittwoch, den 19.06.2019, vor der Vorlesung.